Walshův postup

C.M. Walsh navrhl postup, kterým lze jakékoliv "klasické" indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů **(F2).** Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla P_{01}^{*}, Q_{01}^{*} zavedli příslušné **"*Walshovy modifikace*"** P_{01}^{*W}, Q_{01}^{*W} takto:

$$P_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{P_{01}^{*}}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

$$Q_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{Q_{01}^{*}}{P_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

Ilustrace: Laspeyresovo indexní číslo Vytvořme Walshovy modifikace P_{01}^{LW} a Q_{01}^{LW} výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a vykrácení $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$ dostaneme

$$P_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{P_{01}^{L} \cdot P_{01}^{P}} = P_{01}^{F}$$

a podobně pro kvantové Q_{01}^{LW}

$$Q_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{Q_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{P}} = Q_{01}^{F}$$

Dostaneme dvojici **Fisherových indexních čísel** P_{01}^{F}, Q_{01}^{F}. Lze se přesvědčit, že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí **Paascheho indexní čísla** P_{01}^{P}, Q_{01}^{P} .

Poznámka 1 K dosažení platnosti testu **(F2)** bychom nemuseli operovat s podílem $P_{01}{*}/Q_{01}{*}$, nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum p_i(0) \cdot q_i(0)}} \qquad Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

zaručující splnění **(F2)** se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění jiných testů. Pro příklad lze uvést test proporčnosti **(F7)**, kde požadujeme, aby platilo

$P_{01}^{cAB} = c$, avšak obecně $P_{01}^{cAB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum c.p_i(0) q_i(1)}{\sum .p_i(0) q_i(0)}} = \sqrt{c} . \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum .p_i(0) q_i(1)}{\sum .p_i(0) q_i(0)}}$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě $\sqrt{c}$.

U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$P_{01}^{cW} = \sqrt{\frac{c.}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} c.p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = c. \sqrt{\frac{1}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

pokud $P*_{01}$ vyhovuje testu **(F7)**, což např. platí pro P^{L}_{01} nebo P^{P}_{01}, přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být vysoká. Pokud za $Q*_{01}$ vezmeme Q^{L}_{01}, pak rovnost platí přesně.

von Bortkiewiczova relace

Pruský matematik a ekonom ***Ladislaus Josefovicz von Bortkiewicz*** odvodil užitečnou **strukturální relaci mezi** ***Laspeyresovým*** a ***Paascheho indexním číslem***, která může napomoci vzájemnému porovnání jejich číselných hodnot:

$$B = \frac{P_{01}^{P}}{P_{01}^{L}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = 1 + \frac{S_{\frac{p1}{p0}}}{E_{\frac{p1}{p0}}}\cdot\frac{S_{\frac{q1}{q0}}}{E_{\frac{q1}{q0}}}\cdot r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$$

V ní přítomné symboly mají následující význam:

1) $E_{\frac{p1}{p0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami tvaru $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$. $E_{\frac{p1}{p0}}$ je tedy ***Laspeyresův cenový index*** P_{01}^{L} .

2) $E_{\frac{q1}{q0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ s týmiž vahami, tzn. tento výraz je ***Laspeyresovým kvantovým indexním číslem*** Q_{01}^{L} .

3) $s_{\frac{p1}{p0}}$ označuje výběrovou ***směrodatnou odchylku cenových poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$: $s_{\frac{p1}{p0}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - P_{01}^{L}\right)^2}$

4) $s_{\frac{q1}{q0}}$ vyjadřuje ***směrodatnou odchylku změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ se stejnými vahami, tj.

$$s_{\frac{q1}{q0}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} - Q_{01}^{L}\right)^2}$$

5) Výraz $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ značí ***vážený párový korelační koeficient*** mezi poměrově vyjádřenými cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno: $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}} = \frac{cov\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right)}{s_{\frac{p1}{p0}}\cdot s_{\frac{q1}{q0}}}$, přičemž

výraz pro ***váženou kovarianci*** v čitateli zlomku je

$$cov\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(0)\cdot q_j(0)}\cdot\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}-E_{\frac{p1}{p0}}\right)\cdot\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)}-E_{\frac{q1}{q0}}\right)$$

Poznámka 2 *P*odíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty je variační koeficient, takže dva výrazy v součinu pro B jsou variačními koeficienty $V_{\frac{p1}{p2}}, V_{\frac{q1}{q2}}$. Oba jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit vždy nezáporné.

Ověření platnosti Bortkiewiczova poměru[1]

vyvodíme ze vztahů užívaných v popisné statistice. Prvním z nich je relace

(1) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i y_i=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i\right)+\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})\right]$$

$$\overline{xy}=\bar{x}\cdot\bar{y}+cov(x,y)$$

která je obdobou výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl $var\ x=\overline{x^2}-\bar{x}^2$.

ověření (1) Rozvedením vztahu pro kovarianci dvou vektorů dostaneme

$$\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})\right]=\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}x_i y_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{N}y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{N}x_i+N\bar{x}\bar{y}\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i y_i\right)-\bar{x}\cdot\bar{y}-\bar{y}\cdot\bar{x}+\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot y_i\right)-\bar{x}\cdot\bar{y}$$

následně převedením $\bar{x}\cdot\bar{y}$ na opačnou stranu získáme hledanou relaci. □.

Analogicky odvodíme platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky:

(2) $$\sum_{i=1}^{N}w_i x_i y_i=\left(\sum_{i=1}^{N}w_i x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}w_i y_i\right)+\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_i x_i\right)\cdot\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_i y_i\right)$$

kde $w_i,\ i=1,2,.....,n$ jsou nezáporné váhy normované jedničkovým součtem: $\sum w_i=1$.

ověření (2) Rozvedením vztahu pro *váženou kovarianci* dvou vektorů dostaneme

$$\left[\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x}^w)\cdot(y_i-\bar{y}^w)\right]=\left[\sum_{i=1}^{N}w_i x_i y_i-\bar{x}^w\sum_{i=1}^{N}w_i y_i-\bar{y}^w\sum_{i=1}^{N}w_i x_i+N\bar{x}^w\bar{y}^w\right]=$$, kde

$$=\sum_{i=1}^{N}w_i x_i y_i-\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w-\bar{y}^w\cdot\bar{x}^w+\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i x_i y_i-\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w$$

jsme použili značení

$$\bar{x}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i\cdot x_i\ ,\quad \bar{y}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i\cdot y_i\ ,\quad cov^w(x,y)=\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_i x_i\right)\cdot\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_i y_i\right)$$

V této notaci můžeme výraz **(2)** zapsat ve tvaru

[1] **Původní odvození pochází z příspěvku: Bortkiewicz,L., von.: Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. Nordisk Statistisk Tidskrift I (1922) a 3 (1924).**

(2*) $$\overline{xy}^{w} = \overline{x}^{w} \cdot \overline{y}^{w} + cov^{w}(x, y)$$

Identitu **(2*)** dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem $\overline{x}^{w} \cdot \overline{y}^{w}$. Dostaneme

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x} \cdot \overline{y}} + \frac{cov(x, y)}{\overline{x} \cdot \overline{y}} = 1 + \frac{cov(x, y)}{\overline{x} \cdot \overline{y}}$$

a druhý výraz pravé strany doplníme vložením směrodatných odchylek. Tím získáme vyjádření s variačními koeficienty veličin x_i a y_i a s jejich korelačním koeficientem r_{xy}.

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\overline{x} \cdot \overline{y}} = 1 + \frac{s_x}{\overline{x}} \cdot \frac{s_y}{\overline{y}} \cdot r_{xy}$$

Stejně bychom získali analogické vyjádření pro vážené veličiny $\overline{x}^{w}, \overline{y}^{w}, s^{w}{}_{x}, s^{w}{}_{y}$ a $r^{w}{}_{xy}$, pokud by byly všechny vážené stejnými vahami w_i, $i = 1, 2, \dots n$. Vážená obdoba by vypadala následovně

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\overline{x}^{w} \cdot \overline{y}^{w}} = 1 + \frac{s_x^{w}}{\overline{x}^{w}} \cdot \frac{s_y^{w}}{\overline{y}^{w}} \cdot r^{w}{}_{xy}$$, kde máme

$$\overline{x}^{w} = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i, \quad \overline{y}^{w} = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i, \quad s_x^{w} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \overline{x}^{w}\right)^2}$$

$$s_y^{w} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - \overline{y}^{w}\right)^2}, \quad cov^{w}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \overline{x}^{w}\right)\left(y_i - \overline{y}^{w}\right)$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Sledovaného cíle dosáhneme, ukážeme-li, že levá strana výrazu, může přejít vhodnou konkretizací veličin x_i, y_i a $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve **výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla**.

Vyjádřeme tedy nejdříve podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla jako:

(3) $$\frac{P_{01}^{P}}{P_{01}^{L}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

Na základě předchozího a tvaru pravé strany Bortkiewiczova poměru vyšetříme, zda podíl zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem **(3)**, jehož levá strana by měla podobu vážené kovariance dělené součinem stejně vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že toto vyjádření je možné, a to při následující

volbě veličin : $x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, $y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ a vah $w_i^* = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}$. Tyto

konkretizace pro x_i a y_i lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně zaměnit. Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do **(2)**, dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right]} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}}{\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}\right] \cdot \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}\right]}$$

což po dalším vykrácení součtem $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$ zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla. □.

Záměnou cen za kvantity a opačně bychom dospěli tímto způsobem k vyjádření

$$\frac{Q_{01}^{P}}{Q_{01}^{L}} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot r_{xy}$$ (tzn. s prohozením obsahu x_i a y_i)

z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{L} = P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{P}$ □.

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že **"neutrální hodnota" 1 von Bortkiewiczova podílu nastane v případech**, kdy :

(1) všechny ceny se změní ve stejném poměru, *tj.* $\frac{p_i(1)}{p_i(0)} = c$ *pro všechny komodity.*

Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

(2) všechny kvantity se změní ve stejném poměru *tj .* $\frac{q_i(1)}{q_i(0)} = d$ *pro všechny statky.*

Tato eventualita je při užití reálných hodnot stejně vzácná jako předchozí případ.

(3) vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované.

Tento případ zasazený do obvyklého ekonomického prostředí znamená situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách mezi základním a běžným obdobím.

Ve všech **situacích (1)**, **(2)**, **(3)** tedy **dojde ke shodě** hodnot $P_{01}{}^{L}$ a $P_{01}{}^{P}$.

Podobné úvahy nás přivedou k těmto závěrům:

Má-li být hodnota $P_{01}{}^{P}$ **větší než** $P_{01}{}^{L}$, musí být (při nezápornosti ostatních prvků dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ kladná, tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat kladná korelace**.

Má-li být $P_{01}{}^{P}$ **menší než** $P_{01}{}^{L}$, musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ záporná , tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní**.

To odpovídá situaci, kdy **nadprůměrný růst cen některých komodit** (*oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit*) **provází zpravidla podprůměrný růst** (popř. pokles) **poptávky po těchto komoditách**. *Právě tato situace je v ekonomické realitě obvyklá*. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (*v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit*) lze konstatovat, že $P_{01}{}^{L}$ index bude poskytovat vyšší hodnotu než $P_{01}{}^{P}$, protože "nadprůměrně" vysokým cenovým pohybům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají "podprůměrné" růsty či poklesy v poptávaných množstvích. Dále je zřejmé, že jak **Marshallovo-Edgeworthovo**, tak **Fisherovo** i **Walshovo** indexní číslo budou ležet v intervalu vymezeného zdola $P_{01}{}^{P}$ a shora $P_{01}{}^{L}$.