

Vlastnosti uživatkové funkce, geometrické znázornění

Pro uživatkovou funkci $u(x)$ zavedenou výše pomocí relace „ \succeq “, přijmeme nyní některé vlastnosti, které jsou odvoditelné z vlastností preferenční relace „ \succeq “, a současně se ukazují jako opodstatněné téměř ve všech situacích spojených s rozhodováním spotřebitele na základě jeho preferenčních kritérií.

Definice 1 Jestliže funkce $u(x)$ proměnných x_1, x_2, \dots, x_n má tyto vlastnosti

(U1) $u(x)$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $u(0) = 0$.

(U2) $u(x)$ je **neklesající ve všech proměnných**, tzn. platí:

Jestliže $x \leq z, x \neq z$, pak $u(x) \leq u(z)$. nebo:

(U2s) $u(x)$ je **rostoucí ve všech proměnných**, tzn. platí:

Jestliže $x \leq z, x \neq z$, pak $u(x) < u(z)$.

(U3) $u(x)$ je **spojitá** v celém (n -rozměrném) definičním oboru.

(U4) $u(x)$ je **kvazikonkávní** funkce.

(U5) $u(x)$ je **určena až na ryze monotónní (rostoucí) spojitou transformaci $\phi(x)$** .

potom o takové funkci $u(x)$ řekneme, že má vlastnosti **uživatkové funkce**.

Přesný význam vlastností (U4) a (U5) nyní vyložíme formulací příslušných definicí.

Definice 2 Funkce n proměnných $G(x)$ se nazývá **konkávní**, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory x, z z definičního oboru D_G platí nerovnost:

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) \geq \lambda G(x) + (1-\lambda)G(z)$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in [0, 1]$. Konkávnost tedy znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body x, z komoditního prostoru nesmí hodnota funkce $G(y)$ v žádném bodě y této úsečky klesnout pod (prostorovou) úsečku spojující body $G(x)$ a $G(z)$.

Definice 3 Funkce n proměnných $H(x)$ se nazývá **kvazikonkávní**, jestliže pro kterékoliv dva body x, z z definičního oboru D_H platí nerovnost:

$$H(\lambda x + (1-\lambda)z) \geq \min\{H(x), H(z)\}$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in [0, 1]$. Kvazikonkávnost tedy obrazně znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body x, z (v komoditním prostoru) nesmí hodnota funkce $H(y)$ v žádném bodě y na této úsečce klesnout pod menší z hodnot obou krajních bodů této úsečky $H(x)$, resp. $H(z)$.

Kvazikonkávnost je zde definovaná bez ohledu na existenci derivací (resp. i spojitost) funkce n proměnných. Později ukážeme, jak lze tuto vlastnost formulovat u funkcí, které jsou diferencovatelné. **Poznamenejme, že konkávní funkce je vždy kvazikonkávní, zatímco kvazikonkávní funkce nemusí být nutně konkávní.** Prostorová úsečka spojující body $H(x)$ a $H(z)$ se totiž v žádném případě nemůže „propadnout“ pod minimum vzaté ze svých krajních hodnot.

Vlastnost (U5) konstatuje, že užítková funkce není určena jednoznačně, ale že za „v podstatě tutéž funkci“, resp. funkci patřící do „téže třídy jako je výchozí $u(x)$ “ lze považovat i libovolnou transformovanou funkci $u(x)$, pokud je transformace $\phi(x)$ spojitá a rostoucí. Znamená to tedy, že užítkovou funkci uvažujeme „jen“ v ordinálním smyslu, tzn., že při porovnání užítku, který přináší dvě komoditní kombinace x a z , nerozhoduje, jaké jsou konkrétní číselné velikosti užítku $u(x)$ a $u(z)$, nýbrž jen to, zda vždy platí $u(x) > u(z)$ či $u(x) < u(z)$ nebo zda $u(x) = u(z)$. Zatímco pro kterékoliv dvě komodity lze rozhodnout, která z nich je pro spotřebitele z hlediska přinášeného užítku lepší (popř. jsou-li indiferentní), nelze rozdíl mezi dvěma různými užítky (nejsou-li komodity indiferentní), kvantitativně vyčíslit tj. změřit. Každá transformace ϕ s sebou přináší obecně jinou „mezihladinovou“ škálu pro měření rozdílů.

Poznámka 1 Nejednoznačnost určení užítkové funkce ve smyslu (U5) má za důsledek to, že funkce $u(x)$, $2u(x) + 3$, $2 \cdot \sqrt{u(x) + 3}$, $\sqrt{\log u(x) + 4}$ při $u(x) > 1$ vyjadřují v podstatě tutéž výpověď o spotřebitelově hodnocení, které uplatňuje vůči několika komoditním kombinacím, které mu přinášejí užitek.

V případě, že chceme pojem užítkové funkce využít k hlubší analýze spotřebitelova chování s využitím prvků marginální ekonomické analýzy (a dále ve vztahu k cenám komodit a příjmu spotřebitele), potřebujeme zavést nástroje diferenciálního počtu.

Proto přijímáme pro užítkovou funkci ještě dvě vlastnosti (první přitom vyplývá z druhé) :

(U6) Existují spojitě 1.parcíální derivace $u_r = \frac{\partial u(x)}{\partial x_r}$ (tj. podle všech proměnných) .

(U6*) Existují spojitě 2.parcíální derivace $u_{rs} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r \partial x_s}$ (tj. pro $r, s = 1, 2, \dots, n$).

Význam uvažovaných vlastností (P1), (P2),(P3) a (P5) pro preferenční relaci „ \succeq “ bude zřetelnější ve světle následujícího tvrzení :

Věta 1 [G.Debreu, Eilenberg, Rader]

Jestliže preferenční relace „ \succeq “ splňuje vlastnosti (P1), (P2),(P3) a (P5) v komoditním prostoru generovaném spočetnou bází otevřených množin, potom lze v tomto prostoru zkonstruovat spojitou užítkovou funkci $u(x)$.

Důkaz

a) existence necht' M_1, M_2 je posloupnost otevřených množin ve spočetné bázi X . Pro jakékoliv x uvažujme množinu $N(x) = \{z \mid z \succ x\}$ pro všechna $z \in I_n$. a definujme funkci $v(x)$ vztahem

$$v(x) = \sum_{n \in N(x)} 2^{-n}$$

Jestliže $y \succeq x$, potom $N(x) \subset N(y)$, takže $v(x) \leq v(y)$. Na druhé straně, jestliže $y \prec x$, pak existuje $n \in N(y)$ takové, že $x \in I_n$, ale nikoliv $n \in N(x)$. Tedy $N(x) \not\subset N(y)$ a $v(y) > v(x)$. Tedy v je užítková funkce.

b) spojitost Necht' S označuje libovolnou množinu na rozšířené reálné přímce, která později bude brána jako $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. S stejně jako její doplněk $\mathbb{R} \setminus S$ může sestávat z nedegenerovaných a degenerovaných intervalů. Za „mezeru“ S označíme maximální nedegenerovaný interval doplňku $\mathbb{R} \setminus S$, který má horní a dolní hranici v S . Podle věty vyvozené G. Debreuem [1964] platí, že jestliže S je podmnožina rozšířené reálné přímky \mathbb{R} , pak existuje rostoucí funkce g z S do \mathbb{R} taková, že všechny mezery $g(S)$ jsou otevřené množiny \square .

Geometrická interpretace Uživatelská funkce je představována nadplochou v $n + 1$ -rozměrném prostoru \mathbb{R}_{n+1} , v rámci něhož komoditní prostor X generuje n dimenzních složek a hodnotu užítka v poslední $n + 1$ dimenzi. V této $n + 1$ -dimenzi „měříme“ užitek, který spotřebiteli přináší kterákoliv komoditní kombinace $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$. Geometrická místa bodů (komoditních kombinací), která poskytují stejný užitek (na určité konstantní úrovni u^*) vytvářejí (obrazně řečeno) „vrstevnice“, přičemž výška každé vrstevnice udává hodnotu užítka pro danou kombinaci komodit. Tyto vrstevnice budeme nazývat indifferenční křivky (ve vztahu k užítku).

Při této interpretaci lze o soustavě vrstevnic mluvit jako o tzv. **indifferenční mapě** tvořené těmito vrstevnicemi pro všechny možné hladiny užítka.¹ S ohledem na vlastnost (U5) je indifferenční mapa nezávislá na volbě transformační funkce φ , neboli řečeno jinými slovy: průměty vrstevnic do n -rozměrného komoditního prostoru zůstávají při změně φ beze změn. Je tomu tak proto, že se změnou φ se sice může změnit nominální hodnota užítka, ale preferenční srovnání libovolných dvou komodit se zachovává.

Poznámka 2 Lze ukázat, že také naopak ze znalosti indifferenční mapy tj. vrstevnic určených jako $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \omega$ pro libovolné ω ležící na některé vrstevnici, lze odvodit (opět až na transformující funkci φ) tvar uživatelské funkce u . V tomto směru je tedy **znalost uživatelské funkce a znalost indifferenční mapy rovnocenná**.

Ekonomická historie zná mnoho polemik o oprávněnosti toho, zda lze na kvantifikaci užítka pohlížet i klasickým, tj. kardinálním způsobem. Přestože existuje řada (i nekomplikovaných) způsobů, jak přechod na kardinální vyjadřování provést, ukazuje ekonomická praxe, že důsledné kardinální pojetí měření užítka vyžaduje zpravidla vždy takové informace kvantitativní povahy, jejichž (třeba jen subjektivně posuzovanou) určitelnost či odhadnutelnost zajistit nelze. Zkuste např. ohodnotit, zda - třeba na odlehlém místě a v zimním čase - jsou pro nás teplé rukavice o 20%, 40% či 70% méně užitečné, než teplá zimní obuv, máme-li se rukavicemi chránit před omrznutím rukou a teplými botami před promrznutím nohou. Přitom už samotné ordinální srovnání může být určitým problémem. Ostatně provést úvahu s kardinální kvantifikací nejružnějších uživatelských preferenčních srovnání a následně vyslovit svůj názor či závěr může každý čtenář sám.

Dopad přijímaných vlastností uživatelské funkce na tvar indifferenčních křivek

¹ Ne ze všech hledisek je ovšem srovnání indifferenční mapy se skutečnou (geografickou) mapou plnohodnotné: Vrstevnice indifferenční mapy - viz obrázek č. ... - nemohou být uzavřené křivky vzhledem k vlastnosti (U2) uživatelské funkce a v důsledku (U4) musí vytvářet konvexní útvary: tzn. úsečkové spojnice propojující dva body na téže indifferenční křivce nesmí protnout žádný bod s nižší hladinou užítka. Spotřebitel shlížející na mapu „od počátku souřadnic“ tedy vidí „vrstevnice“ pouze směrem „do kopce“, aniž by se v této mapě mohlo vyskytnout za vrcholem či hřebenem kopce (tj. při zvýšených množstvích dosazovaných komodit) opět klesání směrem dolů.

Vlastnost (U1) $u \in \mathbb{R}^2$ je **reálná konečná funkce** a platí pro ni $u \in \mathbb{R}^2 = \mathcal{D}$. znamená mj., že počátek souřadnic nemůže ležet na žádné indiferenční křivce.

Vlastnost (U2) popř. **(U2s)** udává, že užitek při pohybu po indiferenční mapě ve směrech *doprava* a *nahoru* nemůže klesnout. (Indiferenční křivky, nejenže tedy nemohou být „uzavřené do sebe“, ale nemohou se ani – ze zvětšujícím se množstvím komodity – „odklánět,, od souřadnicových os. Další omezení na jejich tvar pak představuje kvazikonkávnost.

Vlastnost (U3) – spojitost zajišťuje, že indiferenční křivky jsou souvislé množiny („čáry“) a že nejde o množiny sestávající z izolovaných bodů.

Vlastnost (U4) - kvazikonkávnost zajišťuje, že indiferenční křivky jsou vyklenuty směrem k počátku a že množiny $L(u)$ jsou konvexní útvary.

(U5) $u \in \mathbb{R}^2$ je **určena až na ryze monotónní (rostoucí) spojitou transformaci** \mathbb{R}^2 odpovídá pohledu na ordinální pojetí užitku. S každou užitkovou funkcí $u \in \mathbb{R}^2$ patří do stejné „třídy“ celá množina dalších, pokud je lze z té původní vyvodit spojitou rostoucí transformací. Tato generalizace nemění nic na tom, že po transformaci budou body původně ležící na téže indiferenční křivce na ní opět ležet. (mohou ležet ovšem na vyšší nebo nižší hladině užitku). Znamená to mj. že v porovnání užitku dvou bodů neřešíme otázku, o kolik je jedna komoditní kombinace lepší než druhá, ale jen otázku, zda tomu tak je (popř. jsou-li kombinace rovnocenné).

Základní charakteristiky užitkové funkce

Definice 5 První parciální derivace užtkové funkce podle libovolné r -té komodity vyčíslená v pevném bodě $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ je nazývána **mezním (marginálním) užtkem r -té komodity** v tomto bodě (kombinaci komodit). Mezní užitek značíme

$$(2.11) \quad u_r(x^0) = \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_r}$$

Podle předpokladu o ryzí monotónnosti užtkové funkce $u(x)$ je mezní užitek vždy kladný. Požadavek je dost restriktivní, neboť nepřipouští (v realitě snadno myslitelné) úvahy o dosažení určité saturační úrovně „užitečnosti“ některých komodit, po jejímž překročení se užitek pociťovaný spotřebitelem již nezvyšuje. Lze uvést řadu případů, kdy po nabytí jisté úrovně dané komodity užitek dokonce klesá.

Definice 6 Podíl dvou mezních užtků (příslušných různým komoditám), vyčíslený v některém bodě x^0 komoditního prostoru X se nazývá **mezní (marginální) míra substituce mezi r -tou a s -tou komoditou**. Značíme ji m_{rs} a definujeme tedy jako

$$(2.12) \quad m_{rs}(x^0) = \frac{u_r(x^0)}{u_s(x^0)}$$

Mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí komodit reciproká. Obrátíme-li pořadí komodit v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní :

$m_{sr} = \frac{1}{m_{rs}}$. Hodnota m_{rs} závisí jednak na analytickém tvaru užtkové funkce, jednak (a to často daleko silněji) na bodě-komoditní kombinaci, kde ji vyčísľujeme.

Tvrzení 1 Pro mezní míru substituce lze snadno odvodit vztah: $m_{rs} = - \frac{dx_s}{dx_r}$

ověření Vyjdeme z vyjádření totálního diferenciálu funkce u a jeho rozkladu na dvě aditivní komponenty u funkce dvou (substitučních) proměnných.

$$(2.13) \quad du(x^0) = \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_s} dx_s$$

Protože při pohybu po indifferenční křivce $u^* = \text{const}$ se úroveň užtku nemění (mění se však vzájemný poměr faktorů x_r a x_s), platí pro totální diferenciál $du(x^0) = 0$. Odtud zřejmě plyne $-u_r dx_r = u_s dx_s$ a dále

$$(2.14) \quad m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = - \frac{dx_s}{dx_r} \quad \square$$

² Obecný výraz pro rozklad totálního diferenciálu $du(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} dx_i$ se redukuje na dvojčlen, protože při neměnnosti jiných komodit než r -té a s -té zřejmě platí $dx_i = 0, i \neq r, s$.

Mezní míra substituce mezi dvěma komoditami (při neměnicích se komoditách ostatních) **vyjadřuje množství zvýšení jedné komodity** (při snížení druhé komodity o jednotku množství) **potřebné k tomu, aby nově vytvořená komoditní kombinace poskytovala stejný užitek jako kombinace původní.** Mezní míra substituce zůstane nezáporná: Jeden z diferenciálů dx_r nebo dx_s bude záporný, neboť přírůstek v množství jedné komodity musí být kompenzován úbytkem druhé a vice versa.

Věta 2 Zákon klesající mezní míry substituce Při pohybu po indifferenční křivce³ platí

$$(2.15) \quad m_{rs}(x_r, x_s) > m_{rs}(x_r^*, x_s^*) \quad \text{pro} \quad x_r < x_r^*, x_s > x_s^* \quad \text{taková, že} \quad u(x_r, x_s) = u(x_r^*, x_s^*)$$

právě tehdy, když je užitková funkce $u(x)$ kvazikonkávní.

Důkaz Ze zápornosti diferenciálu veličiny $dm_{rs}(x_r, x_s)$ při pohybu po indifferenční křivce vyvodíme pomocí věty o rozkladu totálního diferenciálu, že

$$(2.16) \quad dm_{rs} = \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} dx_s < 0$$

Po dělení dx_r (kterýžto diferenciál je při pohybu ve sledovaném směru kladný, čímž se nemění povaha nerovnosti) lze klesající tendenci mezní míry substituce vyjádřit vztahem

$$(2.17) \quad \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} - m_{rs} \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} < 0$$

Mezní míra substituce m_{rs} bude klesající právě tehdy, jestliže bude její diferenciál (při pohybu po indifferenční křivce) záporný. V následujícím budeme vyšetřovat, jakým vztahům mezi charakteristikami užitkové funkce bude podmínka (2.15) odpovídat. Převédeme tedy postupně diferenciální charakteristiky obsažené v (2.17) na výrazy obsahující charakteristiky užitkové funkce.

Zapíšeme-li výraz pro m_{rs} v definičním vyjádření $m_{rs} = \frac{u_r}{u_s}$ a provedeme-li výpočty

parciálních derivací, dostáváme ekvivalentní vyjádření

$$(2.18) \quad \frac{\frac{\partial \left(\frac{u_r}{u_s} \right)}{\partial x_r} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{\partial \left(\frac{u_r}{u_s} \right)}{\partial x_s} < 0, \text{ které přejde po úpravách do podoby}$$

$$\frac{u_s u_{rr} - u_r u_{sr}}{u_s^2} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{u_s u_{rs} - u_r u_{ss}}{u_s^2} \text{ resp. na tvar}$$

$$\frac{u_s^2 u_{rr} - 2 u_r u_s u_{rs} + u_r^2 u_{ss}}{u_s^3} < 0$$

³rozuměno „shora zleva“ směrem „dolů doprava“. Znázornění je voleno tak, aby statek x_r ležel na horizontální a statek x_s na vertikální souřadnicové ose. Bod (x_r, x_s) leží „nalevo a výš“ oproti lokalizaci bodu (x_r^*, x_s^*)

Během odvozování jsme uplatnili standardní pravidla derivování zlomků pro mezní užítky $u_r(x_1, \dots, u_n)$, $u_s(x_1, \dots, u_n)$, kdy se mění pouze r-tá a s-tá komodita.

Znaménko levé strany (2.18) udává jeho čítec, neboť jmenovatel je s ohledem na kladný mezní užitek u_s kladný.

Zapišeme-li čítec (2.18) jako „kvadratickou formu“, s proměnnými u_r , u_s a koeficienty u_{rr} , u_{rs} , u_{ss} dostaneme (2.18) jako nerovnost

$$(2.19) \quad \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ u_{rr} & u_{rs} \\ u_{rs} & u_{ss} \end{vmatrix} < 0$$

Poznámka: Jiným zápisem podmínky (2.19) je vyjádření

$$(2.20) \quad \begin{vmatrix} 0 & u_r & u_s \\ u_r & u_{rr} & u_{rs} \\ u_s & u_{rs} & u_{ss} \end{vmatrix} > 0$$

Podmínka pro klesající mezní míru substitute je tedy totožná s podmínkou pro kvazikonkávnost výchozí užítkové funkce (je-li tato dvakrát spojitě diferencovatelná).

Jinými slovy: Jestliže předpokládáme pro užítkovou funkci vlastnost kvazikonkávnosti, budeme mít zaručeno, že mezní míra substitute bude mít při pohybu po indiferenční křivce zleva/shora \Rightarrow doprava/dolů klesající tendenci.

Uvedené lze ilustrovat na obrázku 2 : Přípustné podoby indiferenční křivky vymezející hladinu užítku u^0 nalezneme na obrázku [2a], kde je patrné, že při pohybu ve směru zleva/shora \Rightarrow doprava/dolů se vždy zachovává klesající tendence poměru $\frac{dx_2}{dx_1}$.

Naopak na obrázku [2b] je tato relace porušena mezi („inflexními“) body B a C, kde je indiferenční křivka vyklenuta směrem „od počátku souřadnic“. (Povšimněme si však, že i v těchto případech první souřadnice bodu pohybujícího se v uvedeném směru po indiferenční křivce roste, zatímco druhá klesá). Klesající mezní míra substitute je tedy silnější vlastností, než pouhé konstatování, že $m_{rs} > 0$. Jak je patrné, v případech 2c, 2d není množina L_{u^0} konvexní. Později ukážeme), že kvazikonkávnost má přímý vztah ke konvexnosti množin L_{u^0} .

Zavedené předpoklady (U1)-(U5),(U6*) umožňují zavést pro další úvahy velmi užitečnou čtvercovou matici U řádu $n + 1$ sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užité funkce u_r a u_s , konkrétně tvaru

$$U = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Matice U je tedy tvořena – vedle nulového prvku vlevo nahoře - vektorem prvních parciálních derivací – tzv. gradientem (s kladnými prvky) ve zbytku prvního řádku a prvního sloupce a dále Hessovou maticí druhých parciálních derivací v ostatních polích.

Je vzhledem k vlastnosti (U6*) symetrická (obsahuje tedy nanejvýš $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ různých nenulových prvků).

Monotónní transformace uživatelské funkce

Užitková funkce je vlastností (U5) určena až na spojitou rostoucí transformaci $g(u)$. V dalším ukážeme, do jaké míry volba transformace (mající za následek nejednoznačnost u) ovlivňuje veličiny jako je **mezní užitek** a **mezní míra substitute**.

a) **mezní užitek (transformované) uživatelské funkce** $g(u)$ se snadno odvodí z pravidla pro derivování složené funkce :

$$g_r = \frac{\partial g(u)}{\partial r} = g'(u) \cdot u_r, \text{ kde } u_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

Hodnota mezního užtku při transformaci je závislá na volbě transformující funkce. Protože $g(u)$ je rostoucí funkce, bude „transformovaný“ mezní užitek rovněž kladný.

b) **mezní míra substitute transformované uživatelské funkce** $g(u)$ se získá podobně

$$m_{g_{rs}} = \frac{g_r}{g_s} = \frac{\frac{\partial g(u)}{\partial r}}{\frac{\partial g(u)}{\partial s}} = \frac{g'(u) \cdot u_r}{g'(u) \cdot u_s} = \frac{u_r}{u_s}$$

Hodnota mezní míry substitute je na volbě transformující funkce nezávislá.

Jinými slovy: kvantitativní ocenění vztahu mezi dvěma substitučními komoditami není volbou transformující funkce dotčeno. Při transformaci se zachovává vzájemná poloha „vrstevnic“ určujících indifferenční křivky : transformace nemění nic na substitučním vztahu obou komodit při pohybu po indifferenční křivce.

c) **druhé parciální derivace (transformované) uživatelské funkce** $g(u)$ se změní takto:

$$\frac{\partial^2 g(u)}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(g'(u) \cdot u_r \right) = g''(u) \cdot u_r \cdot u_s + g'(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = g''(u) \cdot u_{rs} + g'(u) \cdot u_s \cdot u_r$$

d) U a její determinant $|U|$ se změní provedením rostoucí spojitě transformace takto

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g'(u) \cdot u_1 & & & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{11} + g''(u) \cdot u_1^2 & & & g'(u) \cdot u_{n1} + g''(u) \cdot u_1 u_n \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{12} + g''(u) \cdot u_1 u_2 & & & g'(u) \cdot u_{n2} + g''(u) \cdot u_2 u_n \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{13} + g''(u) \cdot u_1 u_3 & & & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u) \cdot u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_{1n} + g''(u) \cdot u_1 u_n & & & g'(u) \cdot u_{nn} + g''(u) \cdot u_n^2 \end{pmatrix}$$

přičemž příslušný determinant $|G|$ matice G má tvar

$$|G| = [g'(u)]^{n+1} \cdot |U|$$

ověření: Abychom určili hodnotu determinantu $|G|$, resp. pokusili se ho porovnat s determinantem $|U|$, rozložíme $|G|$ pomocí známého součtového pravidla. To říká, že pokud je např. první sloupec čtvercové matice $A = \vec{a}_1$ součtem dvou vektorů α a β , pak je determinant $|A|$ roven součtu dvou determinantů čtvercových matic se sloupci $(\alpha, a_2, a_3, \dots, a_n)$ a $(\beta, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Aplikováno na náš případ, kdy lze 2. až n -tý sloupec matice G rozložit na součtové členy, dostáváme:

$$\begin{aligned} & |a_1, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| = \\ & |a_1, \alpha_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| = \\ & |a_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| + \\ & |a_1, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| + |a_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots, \alpha_n + \beta_n| \text{ atd.} \end{aligned}$$

Získáme tak $2n - 1$ determinantů, které však až na jeden neovlivní výsledný výraz.

Pouze první z nich, který má tvar

$$|G_1| = \begin{vmatrix} 0 & g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{11} & g'(u) \cdot u_{21} & g'(u) \cdot u_{31} & \dots & g'(u) \cdot u_{n1} \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{12} & g'(u) \cdot u_{22} & g'(u) \cdot u_{32} & \dots & g'(u) \cdot u_{n2} \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{13} & g'(u) \cdot u_{23} & g'(u) \cdot u_{33} & \dots & g'(u) \cdot u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_{1n} & g'(u) \cdot u_{2n} & g'(u) \cdot u_{3n} & \dots & g'(u) \cdot u_{nn} \end{vmatrix}$$

je nenulový s hodnotou $g'(u) \cdot u_1 \cdot |U|$. Všechny ostatní determinanty se vyznačují vlastností, že aspoň dva jejich sloupce jsou lineárně závislé a jejich hodnota je tedy nulová. Přiblížíme to na rozkladu do čtyř součtových členů

$$|G| = |G_1| + |G_2| + |G_3| + |G_4|,$$

$$|G_2| = \begin{vmatrix} 0 & g'(u) \cdot u_1 & 0 & g'(u) \cdot u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{11} & g'(u) \cdot u_2 \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{13} + g''(u) \cdot u_1 u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{n1} + g''(u) \cdot u_1 u_n \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{12} & g'(u) \cdot u_2 \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{23} + g''(u) \cdot u_2 u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{n2} + g''(u) \cdot u_2 u_n \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{13} & g'(u) \cdot u_2 \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{33} + g''(u) \cdot u_3^2 & \dots & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u) \cdot u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_{1n} & g'(u) \cdot u_2 \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u) \cdot u_n u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{nn} + g''(u) \cdot u_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

v důsledku lineární závislosti 1. a 3. sloupce, které jsou násobky vektoru (u_1, u_2, \dots, u_n)

$$|G_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_1 \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{13} + g''(u) \cdot u_1 u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{n1} + g''(u) \cdot u_1 u_n \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_1 \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{23} + g''(u) \cdot u_2 u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{n2} + g''(u) \cdot u_2 u_n \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_1 \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{33} + g''(u) \cdot u_3^2 & \dots & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u) \cdot u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_1 \cdot u_n & g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u) \cdot u_n u_3 & \dots & g'(u) \cdot u_{nn} + g''(u) \cdot u_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

v důsledku lineární závislosti 1. a 2. sloupce, které jsou násobky vektoru \vec{u}_1

$$|G_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g'_1 \vec{u}_3 & \dots & g'_1 \vec{u}_n \\ g'_1 \vec{u}_1 & g'_1 \vec{u}_1 \cdot u_1 & g'_1 \vec{u}_2 \cdot u_1 & g'_1 \vec{u}_3 + g''_1 \vec{u}_1 \cdot u_3 & \dots & g'_1 \vec{u}_n + g''_1 \vec{u}_1 \cdot u_n \\ g'_1 \vec{u}_2 & g'_1 \vec{u}_1 \cdot u_2 & g'_1 \vec{u}_2 \cdot u_2 & g'_1 \vec{u}_3 + g''_1 \vec{u}_2 \cdot u_3 & \dots & g'_1 \vec{u}_n + g''_1 \vec{u}_2 \cdot u_n \\ g'_1 \vec{u}_3 & g'_1 \vec{u}_1 \cdot u_3 & g'_1 \vec{u}_2 \cdot u_3 & g'_1 \vec{u}_3 + g''_1 \vec{u}_3 \cdot u_3 & \dots & g'_1 \vec{u}_n + g''_1 \vec{u}_3 \cdot u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_1 \vec{u}_n & g'_1 \vec{u}_1 \cdot u_n & g'_1 \vec{u}_2 \cdot u_n & g'_1 \vec{u}_3 + g''_1 \vec{u}_n \cdot u_3 & \dots & g'_1 \vec{u}_n + g''_1 \vec{u}_n \cdot u_n \end{vmatrix} = 0$$

tentokrát v důsledku lineární závislosti 1., 2. i 3. sloupce: každý z těchto sloupců je opět násobkem vektoru \vec{u}_1

Z předchozího tedy vyplývá, že můžeme psát

$$|G| = a^{n+1} \cdot |U| \quad \square$$

Odtud je patrné, že i když jsou hodnoty determinantů $|U|$ a $|G|$ různé, zachovává po transformaci (spojitou rostoucí funkci) determinant $|G|$ znaménko souhlasné s původním determinanem $|U|$.

Poznámka 3 - lineární transformace užitečné funkce

Zvolme nejjednodušší spojitou rostoucí transformační funkci, kterou je lineární funkce (s kladným koeficientem u lineárního členu), tedy $g(x) = ax + b$, kde $a > 0$, b libovolné. Pak platí

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = a \cdot u_r, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x \partial s} = a \cdot u_{rs}$$

Znamená to tedy, že jak mezní užitek, tak prvky matice 2. partiálních derivací se od původních prvků matice U liší pouze vynásobením kladnou konstantou a . Příslušný determinant $|G|$ je pak a^{n+1} - násobkem původního determinantu $|U|$, tj.

$$|G| = a^{n+1} |U|$$

Definice 7 Jestliže ve třídě ordinálních užitečných funkcí $g(x)$, které jsou ekvivalentní s $u(x)$ po lineární transformaci g , existuje užitečná funkce $v(x)$ taková, že platí

$$v(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$$

pak říkáme, že $u(x)$ je **aditivně rozložitelná užitečná funkce**.

V takovémto případě lze vyjádřit individuální přínosy komodit k celkovému užítku samostatně pro každou komoditu, jinými slovy, celkový užitek je pak součtem těchto individuálních přínosů.