

## Teorie produkce

**Teorie produkce** je další z oblastí matematické ekonomie, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie. Analyzuje se zde chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu v tržním prostředí, kde ceny výrobních faktorů, příp. výrobků jsou určeny mimo vůli výrobce, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor výrobních faktorů v rámci uvažované technologie (souborů výrobních postupů, zkušeností, informací, know-how) vede k dosažení určité úrovně produkce (výroby, výstupu, outputu). Výrobce přitom primárně usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. o maximalizaci rozdílu mezi objemem tržeb z prodaných výrobků a mezi s výrobou souvisejícími výrobními náklady.

Zatím ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se na "technologickou" stránku výrobního procesu. Popíšeme elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápáný výrobní vztah, pomocí něhož se výrobní faktory transformují v rámci dané technologie do celkové produkce. Tento vztah nazýváme **produkční funkce**. Později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli zkoumat zákonitosti, které v daném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. V některých směrech zde spatříme obdobu ekonomických funkčních typů, se kterými jsme se dříve setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

### 1. Produkční množiny, produkční funkce

Nejprve zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. **produkčních množin vstupů**, popř. **výstupů**) zavést pojem **produkční funkce**. Omezíme se na výrobní vztahy v naturálním pojetí, zatím bez zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce však není výchozím, fundamentálním pojmem. Lze uplatnit složitější analytický aparát (tzv. **produkční korespondence**, či **relace**), který však překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Tyto pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. **Ronald W. Shephard**, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti popsat strukturu vlastností **produkčních množin** axiomatically.

#### Definice 1

Uvažujeme-li určitou hodnotu velikosti produkce  $y^0 > 0$ , pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů** [production input set]  $L_{y^0}$  definována jako množina kombinací všech výrobních faktorů, s nimiž lze v dané technologii dosáhnout produkce  $y^0$ . Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce  $F(x)$ , lze  $L_{y^0}$  vyjádřit jako

$$L_{y^0} = \{x; x \geq 0, F(x) \geq y^0\}$$

V produkční množině vstupů jsou - jak patrně z definice - obsaženy i **neefektivní kombinace výrobních faktorů** (faktory jsou přítomny ve větších množstvích, než je nutné k dosažení produkce  $y^0$ ). Je proto účelné se zaměřit jen na hraniční body množiny  $L_{y^0}$ , případně na oblasti vyznačující se úsporným nakládáním s výrobními faktory ve vztahu k požadované úrovni produkce.

## Definice 2

**Izokvanta** [isoquant]  $Q^0$  (na hladině produkce  $y^0$ ) **produkční množiny vstupů**  $L^0$  je definována jako

$$Q^0 = \{x \in L^0 : \theta \cdot x \notin L^0\} \quad \text{pro skalární } \theta \in (0, 1)$$

Jde tedy o množinu hraničních bodů produkční množiny vstupů, vymezení takové kombinace výrobních faktorů, které jsou v níže uvedeném smyslu **postačující pro dosažení produkce na úrovni  $y^0$** . Izokvantu ve vztahu k produkční funkci se chápat jako obdobu indifferenční křivky vůči užitkové funkci  $u$ . Jinak ale se produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) od užitkové funkce liší mj. právě svým kardinálním vymezením.

## Definice 3

**Účinná (efektivní) podmnožina** [efficient subset]  $E^0$  produkční množiny vstupů je určena definicí

$$E^0 = \{x \in L^0 : \nexists z \leq x; \text{ ale } z \neq x \Rightarrow z \notin L^0\}$$

Účinná podmnožina  $E^0$  představuje takové varianty nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány právě v minimálních nutných množstvích. Abychom si lépe uvědomili rozdíl mezi **izokvantou a účinnou podmnožinou** (též produkční množiny vstupů  $L^0$ ), všimněme si, že bod  $x$  leží na izokvantě  $Q^0$  právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod  $z$ , který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem  $x$  nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod (tzn. kombinace výrobních faktorů)  $x$  účinné podmnožiny produkční množiny vstupů  $E^0$  nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením vzniklý jiný bod  $z$  ještě ležel na účinné podmnožině). **Bod účinné podmnožiny musí být bodem izokvanty**, zatímco opačně tomu tak být nemusí.

## Poznámka 1

Typickou vlastností množiny  $L^0$  je její **konvexnost**, která připouští technologie dělitelné v čase. Jestliže  $x, z$  náleží do  $L^0$ , pak lze produkce  $y^0$  dosáhnout tak, že po dobu  $\lambda$  používáme faktory v kombinaci  $x$  a po zbývajícím časový úsek  $(1-\lambda)$  v kombinaci  $z$ .

Stejně jako vymezuje produkční funkce  $F$  soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů  $L$  s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci  $F$  vztahem

$$F(x) = \max \{y : x \in L(y)\}$$

**Produkční funkce je definována** - při vhodných vlastnostech produkčních množin vstupů jako je jejich uzavřenost a konvexnost pro každou úroveň produkce, prázdný průnik těchto množin při  $\lim y \rightarrow \infty$ , tj. při neomezeně rostoucí produkci - **jako maximální dosažitelný výstup, disponujeme-li danou množinou výrobních faktorů  $x$** .

## 2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Na základě podrobné teoretické analýzy provedené v 50. letech **Ronald W. Shephardem**, lze pro obecnou produkční funkci  $F(x)$  přijmout tuto axiomatickou soustavu vlastností:

**(F1)**  $F(x) \geq 0$ ; tj. hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami (aspoň některých) výrobních faktorů.

**(F2)**  $F(x)$  je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů  $x_j \in [0, +\infty)$  pro všechna  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**(F3)**  $F(x)$  je neklesající funkce v každé proměnné. Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. Připouští se však, že mezní produktivita určitého faktoru v některé výrobní situaci může být nulová, tzn. že ne vždy vede zvýšení množství použitého výrobního faktoru k růstu produkce.

**(F4)** Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů  $x > 0$  nebo  $x \geq 0$ , že  $F(x) > 0$  pro nějaké skalární  $\lambda > 0$ , pak

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda x) = +\infty$$

Předpoklad charakterizuje vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporčně zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos. To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které se blíží k "asymptotě" rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

**(F5)**  $F(x)$  je shora polospojité funkce v celém definičním oboru.

Vzhledem k předpokladu (F3) lze ekvivalentně mluvit o polospojitosti zprava. Vlastnost přiblížíme definicí z matematické analýzy:

Funkce  $F(x)$  je polospojité shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě  $x^0 \in \mathbb{R}_+^n$ , jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje okolí  $S_\delta(x^0)$  takové, že pro všechna  $x \in S_\delta(x^0)$  platí  $F(x) < F(x^0) + \varepsilon$ .

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokům v růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních faktorů). Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše půjde o změny na straně "kapitálu" či "technického pokroku" než v práci či surovinách).

**(F6)**  $F(x)$  je kvazikonkávní funkce v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno, platí nerovnost

$$F(\alpha x + (1-\alpha)z) \geq \alpha F(x) + (1-\alpha)F(z)$$

pro libovolnou dvojici bodů  $x, z$  z definičního oboru produkční funkce a libovolné  $\alpha$  z intervalu  $(0, 1)$ . Vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce  $F(x)$  při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi aspoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv k produkční funkci, nýbrž k účinné podmnožině, je **Shephardem** formulovaný, tzv. **“asymetrický” axiom**:

**(F7\*) Účinná podmnožina**  $E \setminus^0$  **produkční množiny vstupů**  $L \setminus^0$  **je ohraničená** pro jakoukoliv hodnotu produkce  $y^0$ .

Uvedený axiom se nazývá **asymetrický** proto, že jeho obdoba není formulovatelná pro analogicky k  $L \setminus^0$  zkonstruované **produkční množiny výstupů**  $P \setminus^0$ .

Většina funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako analytické vyjádření produkční funkce, však tento **asymetrický axiom nespĺňuje**.

**Poznámka 2 – doplňující předchozí výklad**

**Produkční množina vstupů**  $L \setminus^0$  obsahuje všechny možné vstupy (kombinace výrobních faktorů  $x$ ), s nimiž je dosažitelný výstup (hodnota produkce)  $y^0$ .

$$L(y^0) = \{x \mid (x, y^0) \in Z(x, y)\}^1$$

**2A Vlastnosti produkční množiny vstupů**  $L \setminus^0$  pro libovolné  $m \geq 2$ :

**(L1)**  $0 \notin L(y)$  pro jakékoliv  $y > 0$ ,  $L(0) = E_n^+$

S nulovými množstvími výrobních faktorů nelze získat kladnou velikost produkce.

**(L2) Jestliže**  $x \in L(y)$  a  $x^* \geq x$ , **pak platí**  $x^* \in L(y)$

**(L3) Jestliže (a)**  $x > 0$  nebo

**(b)**  $x \geq 0$  a současně  $\lambda * x \in L(y^*)$  pro nějaké  $\lambda > 0$  a  $y^* > 0$ ,

**potom paprsek**  $\{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$  **protíná** všechny množiny  $L(y)$  pro všechna  $y \in [0, +\infty)$

**(L4) Pro**  $y^2 \geq y^1 \geq 0$  **platí**  $L \setminus^{y^2} \subseteq L \setminus^{y^1}$  **vnořování [nesting]**

**(L5)**  $\bigcap_{0 \leq y \leq y^0} L \setminus^y = L \setminus^{y^0}$  **pro**  $y^0 > 0$

**(L6)**  $\bigcap_{y \in [0, +\infty)} L \setminus^y = \emptyset$  **průnik je prázdná množina.**

**(L7)**  $L \setminus^0$  **je uzavřená množina** pro všechna  $y^0 \in [0, +\infty)$

Z tohoto důvodu je **izokvanta** vždy součástí **produkční množiny vstupů**.

**(L8)**  $L \setminus^0$  **je konvexní množina** pro všechna  $y^0 \in [0, +\infty)$

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace poskytující produkci o velikosti  $y^0$  je celá součástí produkční množiny vstupů odpovídající této produkci.

**(L9)**  $E \setminus^0$  **je ohraničená množina** pro všechna  $y^0 \in [0, +\infty)$

<sup>1</sup> Zápísem  $Z(x, y)$  rozumíme **množinu výrobních možností**, tj. množinu dvojic (vektorů)  $(x, y)$  kde výstupy  $x$  jsou dosažitelné s vstupy  $y$ .

<sup>2</sup> **Vlastnosti (množinové) jsou uvedeny v monografii Shephard, R., W.: Theory of Cost a Production Functions. Princeton U.P. 1970 str. 14.**

V případě, že pracujeme s  $m$  výrobky (vyráběnými v dané technologii s nasazením  $n$  výrobních faktorů) má smysl definovat také „duální“ množinovou strukturu, tzv. **produkční množiny výstupů**  $P(x)$ .

V obecném schématu *produkčních korespondencí/produkčních relací* se pracuje s  $n$  výrobními faktory a  $m$  výrobky.

**Produkční množina výstupů**  $P(x^0)$  obsahuje všechny možné výstupy (kombinace výrobků  $y$ ), které jsou dosažitelné (vyrobitelné) pomocí vektoru výrobních faktorů  $x^0$ .

$$P(x^0) = \{y; (x^0, y) \in \mathcal{Y}(x, y)\}.$$

## 2B Vybrané vlastnosti produkční množiny výstupů $P(x^0)$ (jen informativně)

**(P1)**  $P(x^0)$  je uzavřená množina.

Izokvanta je vždy součástí produkční množiny výstupů.

**(P2)**  $P(x^0)$  je konvexní množina.

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny výstupů.

**(P3)** Jestliže  $\lim x^t = +\infty$ , potom  $\bigcup_{t=1}^{\infty} P(x^t) = E_n^+$ . Sjednocením všech produkčních množin vstupů je celý nezáporný orthant. Zvětšujeme-li bez omezení množství všech výrobních faktorů, není velikost produkce shora limitována žádnou hranicí.

**(P4)** Pro  $x^2 \geq x^1$  platí  $P(x^1) \subseteq P(x^2)$  vnořování

Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s většími hodnotami faktorů vždy aspoň stejnou hodnotu produkce.

**(P5)**  $0 \in P(x)$  pro všechna  $x \geq 0$ .

Triviální konstatování, že nulová produkce je součástí produkční množiny výstupů: K výrobě „ničeho“ mohou být uplatněny výrobní faktory v jakýchkoliv množstvích (i nulových).