2. Dvoufaktorová diferencovatelná produkční funkce a její charakteristiky

V dalším úseku výkladu o produkčních funkcích záměrně učiníme dva dočasné předpoklady:

Jednak budeme předpokládat - z důvodu matematické výhodnosti umožňující operovat s alespoň prvními dvěma parciálními derivacemi produkční funkce , že :

(a) Produkční funkce je dvakrát spojitě diferencovatelná, tzn. pro její analytický tvar existují všechny spojité parciální derivace nejméně do druhého řádu včetně, jednak se

(b) Omezíme na analýzu produkční funkce, která má pouze dva výrobní faktory/argumenty: v definicích i při značení uplatníme dva typické výrobní faktory, práci L a kapitál K :

Řekněme hned v úvodu, že dvojí spojitá diferencovatelnost produkční funkce nevyplývá bezprostředně z žádných elementárních vlastností produkčních množin (vstupů ani výstupů) a že pro některé z dále definovaných pojmů (např. pro mezní produktivity) by bylo možno rovnocenně zavést jejich “konečně malé ” ekvivalenty.

V takovémto případě bude tedy mít (dvakrát spojitě diferencovatelná) produkční funkce obecný tvar

$$Y = F(K, L, \alpha, \beta, \chi, \delta, \ldots),$$

kde K vyjadřuje kapitál, L práci a písmena řecké abecedy (počínaje α) příslušné parametry produkční funkce. Počet i umístění těchto parametrů bude záviset na tvaru konkrétní nelinearity, kterou užijeme k popisu technologie příslušné produkční funkci $F(\cdot)$.

Definice 5 **První parciální derivace produkční funkce podle** každého **výrobního faktoru** vyčíslená v některém pevném bodě $F(K, L)$ faktorového prostoru **je nazývána mezní (*marginální*) produktivita výrobního faktoru [factor productivity/product]** (tj. **práce** nebo **kapitálu**) v tomto bodě. Mezní produktivity budeme značit

(2.1) $$m_K = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial K} \qquad m_L = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial L}$$

Přirozeně, každá mezní produktivita může být podstatnou měrou závislá na faktorové kombinaci (K^0, L^0), v níž je vyčíslována. Podle předpokladu o neklesající produkční funkci $F(K, L)$ v obou faktorech je mezní produktivita každého výrobního faktoru vždy nezáporná. Připouští se tedy možnost dosažení určité saturační úrovně “užitečnosti” některého výrobního faktoru, po jejímž překročení se produkce již dále nezvyšuje. Z mikroekonomické reality lze zajisté jmenovat případy, kdy po nabytí jisté optimální úrovně určitého výrobního faktoru mezní užitek neroste či dokonce klesá. Takovéto případy (související zpravidla s technickou, nikoliv ekonomickou stránkou výrobního procesu) však zde nepřipouštíme .

Definice 6 Součin mezní produktivity výrobního faktoru a velikosti tohoto faktoru nazýváme **účast faktoru na produkci [factor share]** (zkráceně jen **účast**) a značíme v_i . Formálním zápisem tedy

(2.2) $$v_K = m_K \cdot K \qquad v_L = m_L \cdot L$$

Účast lze považovat - obrazně řečeno – za hodnotový příspěvek příslušného faktoru k hodnotě produkce. Je přímo úměrná jednak nasazenému množství faktoru, jednak mezní produktivitě faktoru.

Pojem účasti faktoru na produkci – jak níže ukážeme – nabývá zásadní důležitosti v souvislosti s lineární homogenitou produkční funkce. Pokud je produkční funkce lineárně homogenní, lze na základě platnosti ***Eulerovy věty*** hodnotu produkce (uvažujeme-li pouze dva výrobní faktory) zapsat jako

(2.3) $$F(K^0,L^0) = \frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial K} \cdot K^0 + \frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial L} \cdot L^0$$ nebo také stručněji

(2.3A) $$F(K,L) = v_K + v_L$$

V tomto případě lze provést úplný aditivní rozklad funkční hodnoty na jednotlivé faktorové účasti. Význam obou těchto veličin je patrný přímo z jejich definice: veličina e_K podává informaci o tom, o kolik % se zvýší produkce, jestliže se množství rozklad produkce na účasti jednotlivých výrobních faktorů. Zobecnění **(2.3A)** pro vícefaktorovou produkční funkci je zřejmé.

Definice 7 Podíl relativní změny produkce a relativní změny výrobního činitele nazýváme **koeficient pružnosti (elasticity) produkce vzhledem k práci resp. kapitálu. [coefficient of the factor elasticity** relative to production**]** V zápise tedy

(2.4) $$e_K = \frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} \qquad e_L = \frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$$

použitého kapitálu zvýší o 1%. Totéž platí, mutatis mutandis, pro koeficient pružnosti e_L. Oba koeficienty pružnosti jsou bezrozměrné veličiny, které popisují citlivost celkové produkce vůči individuálnímu přínosu každého z obou výrobních faktorů.

Uvažujme dále, že **u dvoufaktorové produkční funkce** $F(K,L)$ **budeme proporčně zvyšovat množství** dosazovaných **výrobních faktorů**, tj. každý z argumentů vynásobíme hodnotou $\lambda > 1$. Potom **podle charakteru vývoje produkce při** této **proporční změně rozlišíme tři** základní **možnosti** :

Definice 8 Jestliže pro libovolná K, L a $\lambda > 1$ bude platit nerovnost

(a) $\sigma \cdot F(K,L) = F(\lambda K, \lambda L)$, kde $\sigma < \lambda$, řekneme, že

produkční funkce vykazuje klesající výnosy z rozsahu výroby **[decreasing returns to scale]**. V případě, že platí

(b) $\sigma \cdot F(K,L) = F(\lambda K, \lambda L)$, při $\sigma = \lambda$, řekneme, že

jde o produkční funkci s konstantními výnosy z rozsahu výroby **[constant returns to scale]**. Pokud

(c) $\sigma \cdot F(K,L) = F(\lambda K, \lambda L)$, kde $\sigma > \lambda$, řekneme, že

produkční funkce se vyznačuje rostoucími výnosy z rozsahu výroby. [increasing returns to scale]

Poznámka 1 Empirické prověření, zda v reálné výrobní situaci platí případ **(a)**, **(b)** nebo **(c)**, je omezeno na určité rozmezí hodnot λ. Je-li produkční funkce popsána analytickým funkčním tvarem (např. dvoufaktorovou mocninnou funkcí), předpokládá se tímto zpravidla zařazení této produkční funkce mezi některý z uvedených tří případů pro libovolné $\lambda > 1$, což s předchozím nemusí korespondovat.

Poznámka 2 **Specifičtějším indikátorem vyšetřování závislosti růstu produkce na proporčním zvyšování výrobních faktorů je homogenita produkční funkce**, která ovšem předpokládá přesněji vymezený typ závislosti růstu produkce na zvětšování λ. Pouze v případě konstantních výnosů z rozsahu produkce, tj. případ b), se tato situace kryje s dále zavedeným pojmem **lineární homogenity** (též **homogenity 1. stupně**).

Definice 9 Produkční funkci nazveme **homogenní s-tého stupně**, jestliže pro libovolná dosazení výrobních faktorů K, L z faktorového prostoru a libovolné kladné λ platí

(2.5)
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$

pro nějakou konstantu s, jejíž přípustný rozsah je zpravidla zdola omezen hodnotou $-$. **V případě, že $s = 1$, mluvíme o lineárně homogenní** (produkční) **funkci.**

Homogenní funkce tvoří důležitou třídu mezi produkčními funkcemi. **Jednou z vlastností lineárně homogenní funkce je** např. **ta, že vedeme-li polopřímku** (paprsek) **z počátku souřadnic** napříč faktorovým prostorem, **pak tečny k izokvantám vedené v bodech, kde tento paprsek protíná jednotlivé izokvanty, jsou navzájem rovnoběžné.**

Definice 10 Podíl dvou mezních produktivit m_K, m_L v některém bodě faktorového prostoru se nazývá **mezní (*marginální*) míra substituce mezi prací L a kapitálem K**. Značíme ji r_{KL}

(2.6)
$$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K}$$

Jak je z **definice 10** patrno, mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí výrobních faktorů reciproká, tzn. obrátíme-li postavení práce a kapitálu v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní r_{KL}. Podotkněme, že **hodnota mezní míry substituce může silně záviset na tom, ve kterém bodě faktorového prostoru ji vyčíslujeme**. Pro mezní míru substituce platí stejně jako v případě užitkové funkce vztah :

(2.6A)
$$r_{KL} = -\frac{dK}{dL} \quad ,$$

jehož vyvození je taktéž zcela shodné se zmíněným případem :.

Předpokládejme, že máme přírůstek produkce aditivně rozdělen do dvou dílčích vlivů. V souladu s přijatým rozkladem totálního diferenciálu $dF(K^0, L^0)$ pišme :

$$dF(K^0, L^0) = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial K} . dK + \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial L} . dL$$

přičemž pro zkrácení notace pišme obě parciální derivace jako F_K resp. F_L. Při pohybu po izokvantě nedochází ke změně velikosti produkce, platí tedy $dF(K, L) = 0$. Odtud tedy

:
$$\frac{F_L(K^0, L^0)}{F_K(K^0, L^0)} = \frac{m_L}{m_K} = -\frac{dK}{dL}$$

Zde tedy vidíme, že **mezní míru substituce můžeme formulovat v pojmech parciálních derivací stejně dobře jako v pojmech konečných přírůstků/úbytků** výrobních faktorů při pohybu po izokvantě. Definiční výraz **(2.6)** může sloužit k přímému výpočtu mezní míry substituce, známe-li analytický tvar produkční funkce, zatímco přednost vyjádření **(2.6A)** spočívá v možnosti přiblížit charakteristiku r_{KL} graficky v prostředí izokvant produkční funkce. Záporné znaménko v **(2.6A)** vystihuje skutečnost, že substituce (s udržením na téže izokvantě) znamená zvýšení množství K jako nutnou kompenzaci při snížení L resp. *vice versa*.

Poznámka 3 Definování mezní míry substituce jako podílu $\frac{m_L}{m_K}$ je - co do vyjádření, která mezní produktivita má být v čitateli a která ve jmenovateli výrazu - věcí konvence. Stejně dobře bychom mohli užít i “reciproké” definice $\frac{m_K}{m_L}$. Podobně je to i se znaménkem, kdy se někdy přisuzuje výrazu r_{KL} záporná hodnota, a naopak podíl $\frac{dK}{dL}$ je brán jako kladné číslo. Zde preferujeme kladnost r_{KL} a zápornost podílu diferenciálů $\frac{dK}{dL}$ – při pohybu po izokvantě jde vždy o přírůstek jednoho a úbytek druhého výrobního faktoru (jsou-li jen dva).

Poznámka 4 V případě n faktorové produkční funkce bychom mohli analogickým způsobem zavést všech $(n-1)\times n$ “mezních měr” substituce. Polovina z nich by ovšem byla reciprokou hodnotou příslušného protějšku.

Mezní míra substituce je - jak už bylo zmíněno **- veličinou, která je velmi citlivá na to, ve kterém bodě faktorového prostoru ji vyčíslujeme**. Jestliže se podíváme na obrázek č. [.] , zaznamenáme, že v bodě B (s velkou hodnotou L a malou K, tzn. s malým podílem $\frac{K}{L}$) je velikost r_{KL} malá. Naproti tomu v bodě C charakterizovaném vysokou hodnotou faktoru K a malou faktoru L bude situace přesně opačná, tzn. r_{KL} bude mít vysokou hodnotu. **Mezní míra substituce je** tedy **nevhodná jako globální kvantitativní charakteristika pro vyjádření substitučnosti dvou faktorů u produkční funkce.** Její hodnota - třeba i při pohybu po izokvantě konstantní produkce - se velmi znatelně mění, přičemž silně závisí na proporci použití obou výrobních faktorů $\frac{K}{L}$.

V souvislosti s tímto problémem si lze položit **otázku, zda je možné, aby při pohybu po izokvantě** odpovídající nějaké pevné hodnotě produkce **zůstala mezní míra substituce stále stejná**. **Odpověď** na ni **je** snadná (a **kladná**), pokud uvážíme, že r_{KL} bude konstantní při konstantních mezních produktivitách výrobních faktorů (touto **vlastností se** ovšem **vyznačuje** právě **lineární produkční funkce**).

Lineární produkční funkce vystihuje tedy **„perfektní substitučnost" mezi výrobními faktory.** Toto chápání „dokonalosti" však nesmíme zaměňovat s perfektností ve smyslu úplné nahraditelnosti jednoho výrobního faktoru druhým. I touto vlastností, která souvisí s tzv. ***podstatností výrobního faktoru*** – viz část [4] - se totiž lineární produkční funkce (zdaleka ne ovšem sama) vyznačuje.

S ohledem na výše řečené bude pro vyjádření substitučnosti mezi výrobními faktory užitečné mít k dispozici dokonalejší **charakteristiku, která by potlačila vysokou závislost mezní míry substituce** r_{KL} **na poloze uvažovaného bodu** (K^0, L^0) ve faktorovém prostoru, resp. na hodnotě podílu $\frac{K^0}{L^0}$.Vhodnou míru zavedeme následující definicí:

Definice 11 **Pružností (elasticitou) substituce [elasticity of substitution]** nazýváme **relativní změnu podílu faktorů** $\frac{K}{L}$ **vůči relativní změně mezní míry substituce** r_{KL} **.**

Vyjádřeno formálně tedy :

(2.7)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{\dfrac{K}{L}}}{\dfrac{dr_{KL}}{r_{KL}}}$$

Jestliže použijeme stručnějšího vyjádření, např. $\frac{K}{L} = \omega$, pak lze s_{KL} psát jako

(2.7A)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{d(\omega)}{\omega}}{\dfrac{dr_{KL}}{r_{KL}}} = \frac{d\ln(\omega)}{d\ln r_{KL}}$$

Tato charakteristika tedy vyjadřuje substituční vztah mezi dvěma faktory "nezávisle" na tom, na jakém místě izokvanty se vyšetřovaný bod (faktorová kombinace) nachází. I zde má smysl uvažovat **otázku, zda existuje** nějaká **třída produkčních funkčních tvarů, pro které platí, že pružnost substituce** s_{KL} **je během pohybu po izokvantě konstantní**. Také **odpověď na tuto otázku je kladná**. Produkční funkce s touto vlastností se nazývají ***CES-produkční funkce*** (převzato z anglického ***"Constant Elasticity of Substitution"***) a lze je vymezit konkrétním analytickým tvarem. Seznámíme se s nimi v části [3] .

Pružnost substituce je charakteristikou, která udává snadnost, se kterou lze jeden výrobní faktor nahradit druhým (v našem případě práci kapitálem)**, aniž se změní hodnota dosažené produkce** (v technologickém prostředí představovaném produkční funkcí $F(K, L)$).

Povšimněme si znaménka charakteristiky *pružnost substituce* v definici 11: Zřejmě jsou vždy kladné veličiny K, L, r_{KL} **v důsledku kladných mezních produktů** m_K, m_L**. Pokud při otáčení polopřímky** vymezené konstantností podílu K / L **postu-**

pujeme ve směru pohybu hodinových ručiček, bude hodnota $d(K/L)$ **záporná, přičemž hodnota** r_{KL} **, kterou „odečítáme" při „tradičním směru" pohybu po izokvantě** (*zleva shora→ doprava dolů*) zaručeně **záporná jen tehdy, bude-li splněn** ***zákon klesající mezní míry substituce*** **– viz vztah** (2.15) ve Větě 2 z oddílu teorie užitku Tato **podmínka,** jak již víme, **bude naplněna právě tehdy, bude-li produkční funkce kvazikonkávní.**

Poznámka 5 **Pružnost substituce**, tak jak je zavedena definicí **(2.7)**, **není použitelná pro výpočetní účely**, neboť z ní není zřejmé, jak lze s_{KL} určit z analytického tvaru produkční funkce (např. dvakrát spojitě diferencovatelné). Někdy, jako např. u ***Cobb-Douglasovy*** **[3.1]** nebo ***ACMS-funkce*** **[3.1]**, lze k výpočtu s_{KL} využít vhodných obratů, které však nejsou proveditelné u jiných funkčních tvarů. Proto **uvedeme vzorec, který umožňuje pružnost substituce vypočítat pro** libovolnou (dvakrát spojitě diferencovatelnou) **dvoufaktorovou produkční funkci.**

VĚTA 1 **Má-li dvoufaktorová produkční funkce** $F(K,L)$ s výrobními faktory práce L a kapitál K všechny **parciální derivace spojité až do druhého řádu včetně**, pak **lze pružnost substituce** s_{KL} **mezi oběma** těmito **faktory vyjádřit vzorcem**

(2.8)
$$s_{KL} = -\frac{L \cdot F_L + K \cdot F_K}{K \cdot L} \cdot \frac{F_K \cdot F_L}{F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2}\ ,\ \text{kde}$$

$$F_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K},\quad F_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L},\quad F_{KK} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2},\quad F_{LL} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}$$

$$F_{KL} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L \partial K} = F_{LK},$$

důkaz provedeme přímým odvozením vzorce **z definičního vztahu** (2.7) ve třech krocích:

1) Ve výrazu (2.7) nejprve vyjádříme diferenciální člen $d(K/L)$ na základě pravidla o rozkladu diferenciálu podílu K/L:

(2.9)
$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L} \cdot dL$$

Výpočtem parciálních derivací v souladu s pravidly o derivování zlomků dospějeme k výrazům

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{L} \cdot dK + \frac{K \cdot (-1)}{L^2} \cdot dL = \frac{1}{L}\left(dK - \frac{K}{L} dL\right)$$ Výraz v čitateli (2.7) je tedy roven

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = \frac{1}{K} \cdot dK - \frac{1}{L} \cdot dL = \frac{L \cdot dK - K \cdot dL}{K \cdot L}$$ a po jeho vydělení dK tedy dostáváme

$$\frac{d(\omega)/\omega}{dK} = \frac{L - K\cdot\left(\frac{dL}{dK}\right)}{K\cdot L} = \frac{L + K\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{K\cdot L} = \frac{L\cdot F_L + K\cdot F_K}{F_L\cdot K\cdot L}$$

Zde jsme opětovně využili vztahu

$$\frac{F_K}{F_L} = -\frac{dL}{dK}$$

2) Nyní přistoupíme k obdobným úpravám u jmenovatele dr_{KL} / r_{KL} ve výrazu **(2.7)**. Nejdříve rozložíme diferenciál podílu F_K / F_L na dva členy, z nichž každý je součinem parciální derivace F_K / F_L podle K, resp. L a diferenciálu příslušného argumentu (výrobního faktoru) . Dostaneme

(2.10)
$$d\left(\frac{F_K}{F_L}\right) = \frac{\partial\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\partial K}\cdot dK + \frac{\partial\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\partial L}\cdot dL$$

Dále vyčíslíme hodnoty obou parciálních derivací na pravé straně a dosadíme do **(2.10)** . Dostaneme

(2.11) $dr_{KL} = d\left(\frac{F_K}{F_L}\right) = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK})dK + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL})dL}{F_L^2}$ a následně

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{d\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\frac{F_K}{F_L}} = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK})dK + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL})dL}{F_L^2}\cdot\frac{F_L}{F_K}$$

Dalšími úpravami pravé strany výrazu **(2.11)** dostáváme :

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK})\cdot 1 + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL})\cdot\left(-\frac{F_K}{F_L}\right)}{\frac{F_K\cdot F_L}{dK}}$$, kde

jsme opět čitatele i jmenovatele pravé strany vydělili dK a využili vztahu $\frac{dL}{dK} = -\frac{F_K}{F_L}$.

Navazující úpravy pak postupně vedou k výrazům

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{\left(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK} - F_K\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot\frac{F_{LL}}{F_L}\right)dK}{F_K\cdot F_L} = \frac{(F_L^2\cdot F_{KK} - 2\cdot F_L\cdot F_K\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot F_{LL})dK}{F_K\cdot F_L^2}$$

3) Souhrnně lze tedy výraz pro pružnost substituce s_{KL} zapsat ve tvaru

$$s_{KL} = \frac{d\omega}{\omega}\cdot\frac{r_{KL}}{dr_{KL}} = \frac{(L\cdot F_L + K\cdot F_K)\cdot dK}{F_L\cdot K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L^2}{(F_L^2\cdot F_{KK} - 2\cdot F_K\cdot F_L\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot F_{LL})\cdot dK}$$

což po dalších úpravách (křížovém zkrácení dK a F_L) vede k cílovému výrazu

(2.12) $$s_{KL} = -\frac{L \cdot F_L + K \cdot F_K}{K \cdot L} \cdot \frac{F_K \cdot F_L}{F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2}$$

Toto vyjádření obsahuje - vedle dosazovaných množství faktorů **K** a **L** - toliko parciální derivace produkční funkce a s_{KL} může být tedy vypočtena pro libovolnou produkční funkci. □ .

Poznámka 6 Jak patrno, znaménko výrazu **(2.12)** určuje – při kladnosti všech ostatních – jmenovatel druhého zlomku, tj. výraz $F_{KK}.F_L^2 - 2.F_{KL}F_K F_L + F_{LL}F_K^2$. Obdobně jako u užitkové funkce lze tento výraz zapsat jako kvadratickou formu (v „proměnných“ F_K, F_L) s maticí koeficientů obsahující druhé parciální derivace produkční funkce

$$\left(F_L, F_K\right)\begin{pmatrix} F_{KK} & -F_{KL} \\ -F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_L \\ F_K \end{pmatrix}$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že **zápornou hodnotu** zmíněný **výraz** (podmiňující kladnou velikost s_{KL}) **nabude tehdy, jestliže matice kvadratické formy bude negativně definitní**. ***Kvazikonkávnost produkční funkce*** $F(K,L)$ ***je*** *tedy opět* ***vlastností****, která zajišťuje, že* ***pružnost substituce mezi výrobními faktory je*** *(při kladných mezních produktivitách)* ***kladná hodnota****.*

Poznámka 7 V pracích některých autorů (spíše ale výjimečně) se lze setkat s „reciprokou“ definicí pružnosti substituce, tzn. $s_{KL}*$ je pojímána jako podíl relativní změny mezní míry substituce r_{KL} a relativní změny faktorového podílu K/L. V tomto případě bude výraz pro $s_{KL}*$ převrácenou hodnotou **(2.7)** .

Poznámka 8 Všimněme si, že pružnost substituce může nabýt kladné, záporné (případně i nulové) hodnoty. Ve vzorci **(2.8)** určuje znaménko (při kladnosti všech ostatních výrazů) jmenovatel druhého zlomku. Ten můžeme rozepsat do tvaru

$$F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2 = -\begin{vmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{vmatrix},$$

což lze snadno ověřit přímým výpočtem determinantu (např. *Sarusovým pravidlem*). Jmenovatel $F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2$ bude záporný právě tehdy, když bude hodnota determinantu kladná. Znamená to tedy, že kladnost pružnosti substituce přímo souvisí s *negativní definitností* matice

$$\begin{pmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix}$$

Bude-li tato matice *negativně definitní*, bude to znamenat kladné znaménko pružnosti substituce. Jak víme z textu pojednávajícího o teorii užitku, odpovídá tato podmínka (spolu s automaticky splněným požadavkem $-F_K^2 < 0$) podmínce *kvazikonkávnosti* produkční funkce. Tedy, bude-li produkční funkce *kvazikonkávní* ve smyslu definice **(P6)**, bude zajištěno, že tato funkce bude vykazovat kladnou hodnotu pružnosti substituce. U funkcí, které tuto podmínku nesplňují, nelze (přinejmenším ne v celém definičním oboru výrobních faktorů) platnost $s_{KL} > 0$ zajistit.

Výraz (2.12) pro s_{KL} lze vyjádřit ve více ekvivalentních tvarech. Jeden z užívaných uvádí následující

Lemma 1 Vzorec **(2.12)** lze vyjádřit ve tvaru

(2.13)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{1}{K.F_K} + \dfrac{1}{L.F_L}}{-\dfrac{F_{KK}}{F_K^2} + 2.\dfrac{F_{KL}}{F_K F_L} - \dfrac{F_{LL}}{F_L^2}}$$

Ověření Definiční výraz

(2.12)
$$s_{KL} = -\frac{L \cdot F_L + K \cdot F_K}{K \cdot L} \cdot \frac{F_K \cdot F_L}{F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2}$$

upravíme tím způsobem, že jeho čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $KL.F_K^2.F_L^2$. Dostaneme

$$s_{KL} = -\frac{\dfrac{1}{K.F_K} + \dfrac{1}{L.F_L}}{1} \cdot \frac{1}{\dfrac{F_{KK}}{F_K^2} - 2 \cdot \dfrac{F_{KL}}{F_K F_L} + \dfrac{F_{LL}}{F_L^2}}$$

Hledaný výraz již okamžitě dostaneme úpravami znamének ve jmenovateli. .

Pro tři a více výrobních faktorů již není jednoznačné vodítko, jak „přirozeně" definovat pružnost substituce mezi každými dvěma z nich. Nejčastěji se lze setkat s ***„přímou" pružností substituce* [McFadden 1963]** označovanou ***DES*** a s ***Allenovou parciální pružností substituce* [Allen 1938]** značenou ***AES***.

Přímá pružnost substituce mezi j-tým a k-tým faktorem je přímým zobecněním dvoufaktorové pružnosti substituce (nemění-li se množství ostatních faktorů), tedy

(2.14)
$$s^D_{jk} = \frac{j \cdot F_j + k \cdot F_k}{k \cdot j} \cdot \frac{F_j \cdot F_k}{F_{jj} \cdot F_k^2 - 2 \cdot F_{jk} \cdot F_j \cdot F_k + F_{kk} \cdot F_j^2}$$
(opět $0 < s_{jk} < \infty$)

Allenova parciální pružnost substituce měří změnu v poptávce firmy po j-tém výrobním faktoru při dané změně ceny faktoru K (opět za podmínky *ceteris paribus* tj. *při konstantních cenách všech ostatních faktorů*). Kontext jejího užití tedy vyžaduje vzetí do úvah cenových aspektů (byť ceny definice přímo neobsahuje) :

(2.15)
$$s^A_{jk} = \frac{\Sigma_i F_i}{x_j x_k \cdot} \cdot \frac{|\Phi_{jk}|}{|\Phi|}$$

kde $|\Phi|$ je determinant a $|\Phi_{jk}|$ je algebraický doplněk k prvku ležícímu na průsečíku $j+1-$ tého řádku a $k+1-$ tého sloupce matice vytvořené (stejně jako matice $\mathbf{U}$ v teorii užitku) z prvních a druhých parciálních derivací (tentokrát) produkční funkce $F(x)$. Hodnota s^A_{jk} může být – na rozdíl od s^D_{jk} – také libovolně záporná. S ohledem na definici prvků v této matici bude i matice pružností mezi jednotlivými faktory symetrická: $s^A_{jk} = s^A_{jk}$.

VĚTA 2 (Eulerova) Nechť $G(x)$ je lineárně homogenní (produkční) funkce n proměnných. Potom lze tuto funkci zapsat ve tvaru :

(2.16) $$G(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i G_i(x)$$, kde $G_i(x)$ je první parciální derivace G v bodě x .

důkaz Z homogenity funkce $G(x)$ vyplývá pro libovolné λ platnost vztahu :

$$G(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda \cdot G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Derivujme nyní levou stranu tohoto vztahu podle λ. Dostaneme (podle pravidla o derivaci složené funkce)

(2.16A) $$\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial (\lambda x_i)} \cdot \frac{\partial (\lambda x_i)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial (\lambda x_i)} \cdot x_i$$

Pravá strana po analogické derivaci nabude tvar

(2.16B) $$\frac{\partial (\lambda G(x))}{\partial \lambda} = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Nyní porovnáme pravé strany **(2.16A)**,**(2.16B)** a uplatníme vlastnost lineární homogenity:

Vzhledem k tomu, že totožnost obou těchto pravých stran platí (dle předpokladu o lineární homogenitě $G(x)$) pro libovolné λ, položíme ve výrazu **(2.16A)** $\lambda = 1$. Obdržíme tak

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) \cdot x_i$$

z čehož plyne platnost dokazovaného tvrzení. □.

Uvedená věta, užívaná též v řadě jiných oblastí matematických aplikací, je velmi důležitá. Ukazuje, že za předpokladu lineární homogenity je možné přesně rozložit funkční hodnotu do n členů (součinů množství faktoru a příslušné mezní produktivity), tzn. vyjádřit tuto funkční hodnotu aditivně jako součet n faktorových účastí. Jak dále uvidíme, řada funkcí užívaných v teorii produkce (např.***Cobb-Douglasova funkce*** s jedničkovým součtem mocninných parametrů), má vlastnost lineární homogenity, takže je taková dekompozice proveditelná. U funkcí nesplňujících tuto vlastnost je takový rozklad uvažovatelný nanejvýš přibližně.

Další věta ukáže, že **hodnotu pružnosti substituce lze u produkčních funkčních tvarů**, které jsou **homogenní 1.stupně**, **vyjádřit** podstatně **jednodušeji** než vzorcem uvedeným ve větě 1:

VĚTA 3 Nechť je dvoufaktorová produkční funkce $F(K,L)$ lineárně homogenní. Pak lze pružnost substituce mezi výrobními faktory K,L **vyjádřit u této funkce vztahem**

(2.17) $$s_{KL} = \frac{F_K . F_L}{F(K,L).F_{KL}}$$

důkaz Vyjdeme z obecného vztahu pro pružnost substituce (2.8) mezi faktory práce L a kapitál K.

(2.12) $$s_{KL} = -\frac{L\cdot F_L + K\cdot F_K}{K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L}{F_{KK}\cdot F_L^2 - 2\cdot F_{KL}\cdot F_K\cdot F_L + F_{LL}\cdot F_K^2}$$

Z ***Eulerovy věty*** vyplývá pro lineárně homogenní (produkční) funkci platnost vztahu

$$F(K,L) = F_K.K + F_L.L$$

Jestliže tento aditivní rozklad zderivujeme podle obou argumentů, dostaneme

$$F_L(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\partial F_K(K,L)}{\partial L}.K + F_K(K,L).\frac{\partial K}{\partial L} + \frac{\partial F_L(K,L)}{\partial L}.L + F_L(K,L).\frac{\partial L}{\partial L}$$

Poněvadž dále $\frac{\partial L}{\partial L} = 1$ **a** $\frac{\partial K}{\partial L} = 0$**, obdržíme po eliminaci** $F_L(K,L)$ **na obou stranách zjednodušení**

(2.18) $$F_{KL}(K,L).K + F_{LL}(K,L).L = 0.$$

Zcela analogicky (jako parciální derivaci $F(K,L)$ podle K) **obdržíme**

$$F_K(K,L) = F_K(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{\partial F_K(K,L)}{\partial K}.K + F_K(K,L).\frac{\partial K}{\partial K} + \frac{\partial F_L(K,L)}{\partial K}.L + F_L(K,L).\frac{\partial L}{\partial K}$$

Ze stejných důvodů jako dříve **získáme po eliminaci** $F_K(K,L)$ **na levé i pravé straně**

(2.19) $$F_{KK}(K,L).K + F_{LK}(K,L).L = 0.$$

Nyní z (2.17),(2.18) vyjádříme druhé parciální derivace $F_{KK}(K,L)$, $F_{LL}(K,L)$ **pomocí** $F_{LK}(K,L)$:

$$F_{LL}(K,L) = -\frac{K}{L}.F_{LK}(K,L)$$ a podobně $$F_{KK}(K,L) = -\frac{L}{K}.F_{LK}(K,L)$$

a obojí dosadíme do výrazu pro s_{KL}

(2.12) $$s_{KL} = -\frac{L\cdot F_L + K\cdot F_K}{K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L}{F_{KK}\cdot F_L^2 - 2\cdot F_{KL}\cdot F_K\cdot F_L + F_{LL}\cdot F_K^2}$$

Úpravou jmenovatele (vynásobením $K.L$ **a vytknutím** F_{KL} **) a po zkrácení** $F_K.F_L$ **dále dostaneme**

(2.20) $$s_{KL} = \frac{F_K.F_L.F(K,L)}{F_{KL}(F_L^2L^2 + 2.F_KF_L.KL + F_K^2K^2)}$$

Dále si všimněme, že druhá mocnina výrazu pro $F(K,L)$ dává podle ***Eulerovy věty*** vztah

$$F^2(K,L) = F_K^{\,2}.K^2 + 2.F_K F_L KL + F_L^{\,2}.L^2 \quad ,$$

tedy výraz obsažený v závorce jmenovatele. **Odtud** už snadno - krácením $F(K,L)$ - **dostaneme dokazovaný tvar**

(2.17) $$s_{KL} = \frac{F_K.F_L}{F_{KL}.F(K,L)} \qquad \square .$$

Ilustrace Usnadnění výpočtu pro **pružnost substituce** v případě lineárně homogenní funkce ukážeme na příkladu **dvoufaktorové** ***Cobb-Douglasovy produkční funkce*** tvaru

$$Y = F(K,L) = \beta_0.K^{\beta_1}.L^{\beta_2} \text{ , při } \beta_1 + \beta_2 = 1$$

u níž snadno spočteme $F_K = \frac{\beta_1}{K}.F(K,L)$, $F_L = \frac{\beta_2}{L}.F(K,L)$, $F_{KL} = \frac{\beta_1.\beta_2}{K.L}.F(K,L)$

Dosazením do výrazu pro s_{KL} dostaneme

$$S_{KL} = \frac{F_K.F_L}{F_{KL}.F(K,L)} = \frac{\frac{\beta_1}{K}.F(K,L).\frac{\beta_2}{L}.F(K,L)}{\frac{\beta_1.\beta_2.F^2(K,L)}{K.L}} = 1$$

ve shodě s výpočtem provedeným pomocí již uvedeného obratu.[1]

Poznámka 9 U lineární funkce $Y = F(K,L) = \beta_1 K + \beta_2 L$ lineárně homogenní pro případ $\beta_1 + \beta_2 = 1$ platí $F_K = \beta_1$, $F_L = \beta_2$, $F_{KL} = 0$; okamžitě dostáváme $s_{KL} = \frac{\beta_1.\beta_2}{0} = +\infty$.

VĚTA 4 **Nechť $G(x)$ je homogenní stupně s** $s \geq 1$ **(produkční) funkce** n proměnných. **Potom** pro kteroukoliv z **n** parciálních derivací této funkce $G_i(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial x_i}$ platí, že tato **parciální derivace je homogenní stupně** $s-1$.

Důkaz Z homogenity s-tého stupně funkce $G(x)$ plyne pro libovolné λ platnost vztahu

$$G(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s \cdot G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Derivováním obou stran tohoto vztahu podle x_i dostaneme

(2.20) $$\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda x_i}.\frac{\partial \lambda x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda x_i}.\lambda = \lambda^s.\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}$$, z čehož po krácení λ máme

$$G_i(\lambda x) = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda x_i} = \lambda^{s-1}.\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} = \lambda^{s-1}.G_i(x)$$

Odtud plyne, že funkce $G_i(x)$ je homogenní stupně $s-1$. $\square$.

---

[1]**Výpočet je ovšem korektní jen pro případ jedničkového součtu mocninných parametrů. Cobb-Douglasova funkce obecně není lineárně homogenní, takže bychom měli užít obecný vzorec (2.12).** Jak se trpělivý čtenář přesvědčí, i ten **poskytne hodnotu pružnosti substituce rovnou 1.**

Dva jednoduché příklady

Příklad 1 Dvoufaktorová **lineární produkční funkce** tvaru

$$y = \alpha + \beta_1 K + \beta_2 L \qquad (\text{při } \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0) \qquad , \tag{2.21}$$

je-li užita jako produkční, nemůže obsahovat konstantní člen (jinak by zřejmě neplatilo $F(0) = 0$). Odtud vyplývá restrikce $\alpha = 0$. Tato funkce má

a) ***mezní produktivity*** přímo rovny parametrům, tj. $m_K = \beta_1$ a $m_L = \beta_2$

b) ***koeficienty pružnosti produkce***

vzhledem ke kapitálu $e_K = \dfrac{\beta_1 \cdot K}{Y}$ a vzhledem k práci $e_L = \dfrac{\beta_2 \cdot L}{Y}$.

Koeficienty pružnosti se tedy mění (přímo úměrně) s růstem každého výrobního faktoru.

c) ***účast kapitálu*** *na produkci* $v_K = \beta_1 \cdot K$,podobně ***účast práce*** *na produkci* $v_L = \beta_2 \cdot L$

d) ***výnosy z rozsahu*** výroby ***konstantní*** (lineární funkce je homogenní stupně 1) při $\alpha = 0$.

e) ***mezní míru substituce*** r_{KL} mezi výrobními faktory rovnou podílu "sklonových" parametrů, tj. $\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ a tedy ***konstantní*** během celého pohybu po izokvantě konstantní úrovně $\mathbf{y}_0$.

f) ***pružnost substituce*** $\mathbf{s}_{KL}$ neomezeně velkou ($+\infty$, popř. $-\infty$)

Toto konstatování ověříme následovně :

Z definice s_{KL} **plyne**

$$s_{KL} = \frac{d\ ln\ \omega}{d\ ln\ r_{KL}} = \frac{d\ ln \dfrac{K}{L}}{d\ ln \dfrac{\beta_2}{\beta_1}} \qquad .$$

Jelikož však ve jmenovateli uvažujeme malou změnu výrazu, který je (i po logaritmování) při pohybu po izokvantě konstantní, má jmenovatel ("přírůstek" konstanty) nulovou hodnotu. Výraz v čitateli má konečnou velikost (je kladný pro $\mathbf{K} > \mathbf{L}$, kde podíl $\mathbf{K/L} > 1$ a logaritmus je tudíž kladný resp. záporný v opačném případě $\mathbf{K/L} < 1$), a plynule klesá podél uvažované izokvanty.

Též vzhledem k této vlastnosti **se lineární funkce k modelování výrobních procesů** téměř **nepoužívá**. Empirické výzkumy totiž ukázaly, že substituce mezi výrobními faktory (a to nejen mezi prací a kapitálem) probíhá obtížněji, než jak by odpovídalo konstantní hodnotě mezní míry substituce u lineární funkce.

Příklad 2 Dvoufaktorová **ryze kvadratická produkční funkce** tvaru

$$y = \alpha + \frac{1}{2}\beta_{11}K^2 + \beta_{12}L \cdot K + \frac{1}{2}\beta_{22}L^2 \tag{2.22}$$

(při $\beta_{11} > 0$, $\beta_{22} > 0$ a opět vynucené restrikci $\alpha = 0$) má

a) ***mezní produktivity*** $m_K = \beta_{11} \cdot K + \beta_{12} \cdot L$ resp. $m_L = \beta_{22} \cdot L + \beta_{12} \cdot K$, a tedy závislé na množstvích použitých výrobních faktorů,

b) ***koeficienty pružnosti produkce*** vzhledem ke kapitálu $e_K = \frac{\beta_{11} \cdot K^2 + \beta_{12} \cdot K \cdot L}{Y}$ a vzhledem k práci obdobně $e_L = \frac{\beta_{22} \cdot L^2 + \beta_{12} \cdot K \cdot L}{Y}$. Obě veličiny jsou nelineární funkcí výrobních faktorů (a to i faktoru k danému koeficientu nepříslušejícímu).

c) ***účasti na produkci*** *u* ***kapitálu*** $v_K = \beta_{11} \cdot K^2 + \beta_{12} \cdot L \cdot K$, podobně
u ***práce*** $v_L = \beta_{22} \cdot L^2 + \beta_{12} \cdot L \cdot K$

d) charakter ***výnosů z rozsahu výroby*** vyšetříme velmi snadno :

$$F(\lambda K, \lambda L) = \beta_{11}(\lambda K)^2 + \beta_{12}(\lambda K)(\lambda L) + \beta_{22}(\lambda L)^2 = \lambda^2 \cdot F(K, L) \tag{2.23}$$

Pro $\lambda > 1$ výsledek představuje (jinak spíše vzácnou) vlastnost rostoucích výnosů z rozsahu výroby. **Vztah (2.20)** zřejmě **prokazuje homogenitu 2.stupně kvadratické produkční funkce.**

e) ***mezní míru substituce*** r_{KL} rovnou podílu

$$r_{KL} = \frac{m_K}{m_L} = \frac{\beta_{22} \cdot L + \beta_{12} \cdot K}{\beta_{11} \cdot K + \beta_{12} \cdot L} \tag{2.24}$$

, po drobné úpravě $\frac{\beta_{22} + \beta_{12} \cdot \omega}{\beta_{11}\omega + \beta_{12}}$, kde opět $\omega = \frac{K}{L}$.

f) pro výpočet ***pružnosti substituce*** s_{KL}, kde nelze uplatnit stejný obrat jako u lineární produkční funkce, musíme postupovat dosazením do výpočtového vzorce **(2.8)**:

Nejprve dostaneme:

$$s_{KL} = \frac{[L(\beta_{12}K + \beta_{22}L) + K(\beta_{11}K + \beta_{12}L)] \cdot (\beta_{12}K + \beta_{22}L)(\beta_{11}K + \beta_{12}L)}{KL[\beta_{11}(\beta_{12}K + \beta_{22}L)^2 - 2\beta_{12}(\beta_{11}K + \beta_{12}L)(\beta_{12}K + \beta_{22}L) + \beta_{22}(\beta_{11}K + \beta_{12}L)^2]}$$

následně po běžných algebraických úpravách dospějeme k výrazu

$$s_{KL} = \frac{(\beta_{12}K + \beta_{22}L)(\beta_{11}K + \beta_{12}L)}{KL(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} = \frac{m_L m_K}{KL(\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2)} \tag{2.25}$$

Také v tomto případě tedy závisí pružnost substituce na poloze bodu, ve kterém tuto charakteristiku vyčíslujeme (kombinaci faktorů K^0 a L^0).

Kvadratická produkční funkce je s ohledem na některé zmíněné nedostatky **používána zřídka**. Vedle zmíněné restrikce $\alpha = 0$ nutné k zajištění **(P1)** totiž nastává problém také s udržením nezápornosti **(P2)** a s tím, že vzhledem k požadavku daném axiomem **(P3)** je akceptovatelná vždy jen část definičního oboru: Navíc **při** $\beta_{11} > 0$, $\beta_{22} > 0$ **není funkce kvazikonkávní.**