## 3 Kategorizace výrobních faktorů v produkční funkci

**V tomto oddíle uvedeme stručný přehled několika důležitých vlastností, kterými může být charakterizována uvažovaná výrobní technologie daná produkční funkcí $F(x)$ nebo jednotlivé výrobní faktory obsažené v této produkční funkci.** Některé z těchto vlastností lze vyslovit, aniž použijeme předpoklad o diferencovatelnosti (případně i spojitosti) produkční, nákladové nebo jiné „ekonomické„ funkce. Výhodou hladkých (neomezeně nebo aspoň do dostatečného řádu diferencovatelných) funkcí ovšem je možnost některé tyto vlastnosti vyšetřit snadněji než přímou analýzou z definičního vztahu.

### Definice 9 Podstatnost výrobního faktoru

**Výrobní faktor** jako argument v ekonomickém vztahu j**e** ***podstatný*** [essential] **tehdy, jestliže jeho přítomnost je nutná k tomu, aby hodnota produkce,** kterou výrobní proces poskytuje**, byla kladná**. Formálně **podstatnost skupiny s faktorů lze zapsat** jednoduše (pro přehlednost značení předpokládáme, že podstatných je právě prvních *s* faktorů) **vztahem** :

**(4.1)** $$F(0,\dots,0,\dots,0,X_{s+1},\dots,X_n) = 0 ,$$

kde $F(x_1,\dots,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n)$ **je produkční funkce reprezentující technologii** a kde **symboly** $X_{s+1},\dots,X_n$ **označují libovolná dosazení z oboru přípustných hodnot ostatních (*nepodstatných, non-essential*) faktorů.** □.

Je zřejmé, že **je-li kombinace** $v_1,\dots,v_s$ **faktorů podstatná, je podstatná i kterákoliv kombinace** $v_1,\dots,v_r$ **pro** $s \le r \le n-1$**.** Tento důsledek je očividný, neboť **ubráním dalšího faktoru s kladným množstvím z okruhu stávajících podstatných,** jež vystupují v nulových množstvích, **nemůžeme dosáhnout kladné hodnoty produkce.**

Podstatný faktor je z geometrického hlediska charakteristický tím, že izokvanta na kterékoliv hladině produkce nemůže přilnout k ose/osám dané/daným nepodstatným/i faktorem/y v jeho(jejich konečně velké hodnotě/velkých hodnotách. **Podstatné jsou** např. **všechny argumenty v *Cobb-Douglasově funkci* a všechny výrobní faktory *v ACMS-funkci* s kladnou hodnotou parametru $\rho$ .** Naopak, **při záporném $\rho$ jsou výrobní faktory u *ACMS*-funkce nepodstatné, stejně jako výrobní faktory v produkční funkci typu *ADDILOG***, v níž jsou argumenty vázány aditivně.

### Definice 10 Substitučnost (*nahraditelnost*) dvou faktorů

**Vlastnost se vztahuje k možnosti nahrazení dvou** dosazovaných množství **výrobních faktorů jinými dvěma množstvími vedoucími k téže hodnotě produkce. Jestliže v určitém bodě** - faktorové kombinaci - **existují kladné mezní produktivity dvou faktorů, pak lze říci, že tyto faktory jsou v substitučním vztahu** (snížení jednoho musí být kompenzováno zvýšením druhého, má-li být úroveň produkce neměnná)**. Pojem substitučnosti** však **lze zavést i u produkčních funkcí, které nejsou diferencovatelné, případně ani nejsou spojité.**

**F.Pokropp v [1] definuje dva *plně substituční faktory*** (neklesající produkční funkce), **např. $r$ -tý a $s$ -tý) rovností oborů funkčních hodnot**

**(4.2)** $$F(x_1,\dots,X_r,\dots,x_s,\dots,x_n) = F(x_1,\dots,x_r,\dots X_s,\dots,x_n)$$

**Při** $1 \leq r, s \leq n$, **kde** $X_r$ **resp.** $X_s$ **označují obory přípustných hodnot,** zpravidla interval, **kterých může nabývat** $r$ **-tý resp.** $s$ **-tý faktor.** Nejsou-li uvažována omezení v rozsahu přípustných hodnot faktorů, pak $X_s = X_r = \langle 0, +\infty )$.

Pojem *lokální substitučnosti* se zasazuje do prostředí mezních užitků (*substitučních*) faktorů v *neklesající produkční funkci*.

Nechť máme $F_r(x)$, $F_s(x)$ dva mezní produkty v bodě $x$. Pak jsou $r$ -tý a $s$ -tý faktory tomto bodě (tedy *lokálně*) substituční) platí-li: $F_r(x) > 0, F_s(x) > 0$.

## Limitovatelnost produkční funkce resp. faktoru

**Pojem limitující produkční funkce je** jistým **protějškem substituční vlastnosti a souvisí s již zavedenou vlastností podstatnosti faktorů. Je spojován se situacemi, kdy nezvyšování množství jednoho nebo skupiny faktorů znemožňuje růst celkového výnosu, i když (třeba bez omezení) zvyšujeme množství faktorů ostatních (** ***nelimitujících*** **). Lze přitom rozlišit slabou a silnou limitovatelnost, kdy** ***slabá limitovatelnost*** **představuje pouze nutnou zatímco** ***silná limitovatelnost*** **současně nutnou i postačující podmínku k tomu, aby zvýšení množství limitujícího faktoru (skupiny faktorů) implikovalo zvýšení celkové produkce[1].**

### Definice 11A

***Slabá limitovatelnost*** byla **R.W.Shephardem v [2]** definována jako podmínka:

**Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů** $x_j^*, \ldots, x_s^*$ (při nelimitujících faktorech $x_{s+}, \ldots, x_n$**), že pro jakýkoliv vektor** $x = (x_1, \ldots, x_s, x_{s+}, \ldots, x_n)$**,kde** $x_j \leq x_j^*$, $j = 1, \ldots, s$ **platí** $F(x) < M$ **pro nějakou** (dostatečně velkou) **konstantu** $M$ , (tj. $F(x)$ je shora omezená)**, pak řekneme, že kombinace** $x_j^*, \ldots, x_s^*$ **je *slabě limitující*.** □.

**Zesílením předchozí vlastnosti je**

### Definice 11B *silná limitovatelnost*, která je dána podmínkou :

**Platí-li pro** jakoukoliv **kombinaci výrobních faktorů** $x_j^*, \ldots, x_s^*$ (při nelimitujících $x_{s+}, \ldots, x_n$) **a** jakýkoliv **vektor** $x = (x_1, \ldots, x_s, x_{s+}, \ldots, x_n)$ takový, že $x_j \leq x^*$ $j = 1, \ldots, s$ **,**

**že** $F(x)$ **je shora omezená, pak je faktorová kombinace** $x_j^*, \ldots, x_s^*$ ***silně limitující*.** □.

Z definice, která má globální povahu, je ihned zřejmé, že silně limitující faktor je i slabě Souvislost s podstatností faktoru je dána větou (viz [ 2 ] ) .

**VĚTA 1 Nechť produkční funkce** $F(x)$ **splňuje axiom (P7*),** tj. účinné podmnožiny $E(y)$ jsou omezené pro libovolnou hodnotu produkce $y$ **. Pak platí, že** ***faktor/faktorová kombinace je slabě limitující právě tehdy, když je podstatný/á*.**

---

[1] **N.Georgescu-Roegen** v této souvislosti mluví o limitující (analogicky ke slabé limitovatelnosti) resp. limitativní (obdobě silné limitovatelnosti) faktorové kombinaci. U první vlastnosti jsou určující technické důvody, zatímco druhá má zpravidla též sociální a ekonomické pozadí.

**Důkaz**: převezmeme z publikace [2]: □.

**Z definice**, která má globální povahu, **je** ihned **zřejmé, že silně limitující faktor je i slabě limitující** ( a **je** tedy **také podstatný**, pokud je splněn axiom **(P7*)** ).

**Protikladem substituční vlastnosti je taková situace, kdy výroba může racionálně probíhat pouze tehdy, jestliže část nebo všechny výrobní faktory se účastní výrobního procesu v pevně určeném poměru.** (Tento poměr může, ale nemusí záviset na velikosti úhrnné produkce). Krajním případem je pak ***komplementární*** **produkční funkce.**

### Definice 12 A

**Produkční funkce se nazývá *ryze komplementární***, jestliže představuje **technologii** vyjádřenou **vztahem:**

**(4.3)**
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Min \left[ \frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{a_n} \right] \quad x_i \geq 0, \alpha_i > 0 \ ,$$

v němž např. hodnota $F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ v určitém bodě $x^0$ (a při předem daných technologických koeficientech $a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$) určuje limitující hodnotu produkce). **V účinných bodech izokvant je minima dosaženo současně ve všech argumentech funkce (2.1), přičemž poměr $\frac{x_j}{a_j}$ nezávisí na objemu produkce.**

**V obecnějších komplementárních funkcích je pojem "fixních proporcí"** zahrnutých faktorů **chápán** poněkud **volněji: Jestliže definujeme produkční funkci ve tvaru** $y = Min\left[f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\right]$**, kde jednotlivé** $f_j$ **vyjadřují maximálně dosažitelnou hodnotu produkce, jestliže** $j$ **-tý faktor je ve výrobním procesu uplatněn v množství** $x_j$**, pak množinu účinných bodů na jednotlivých izokvantách nemusí představovat přímka procházející počátkem. Pokud jsou všechny funkce** $f_j$ **rostoucí, pak vždy existuje právě jediná kombinace** $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$**, v níž jsou všechny faktory** slabě **limitující. V ní pak platí** $f_1(x_1^*) = f_2(x_2^*) = \ldots = f_n(x_n^*)$, přičemž **poloha bodu** $x^*$ obecně **závisí na dosaženém objemu produkce** $y$ **.**

### Definice 12 B

**Produkční funkce se nazývá *slabě komplementární***, jestliže představuje **technologii**

**(4.4)**
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Min\left[f_1(x_1); f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)\right], \quad x_i \geq 0$$

kde každá $f_i(x_i)$ **je nezáporná, neklesající funkce** právě **jediného argumentu** $x_i$ **,** **přičemž platí** $f_i(0) = 0$ .

**Je zřejmé, že funkce zapsaná pod (4.3) vyhovuje při daných omezeních na parametry též podmínce (4.3), tedy, že ryze komplementární funkce je též slabě komplementární.**

**Poznámka:** **Komplementarita, stejně jako substitučnost**

## **Separabilita** produkční funkce

**Smysl této vlastnosti se váže k** určité **relativní nezávislosti postavení příslušného faktoru v ekonomickém vztahu.** Tato "nezávislost" **má zpravidla podstatný vliv na možnost racionální agregace faktorů téže povahy do makroagregátu v makroprodukční funkci. Separabilita se buď definuje ve vztahu k monotónnosti funkce (nazvěme ji *relační separabilita*) nebo ve vztahu k mezní míře substituce faktorů, které mají být agregovány (tzv. *funkcionální separabilita* ).**

### Definice 13A *Relační separabilita*

**Tento přístup uplatňuje např. Pokropp v [1]; vlastnost je pak představována implikací** (v zápisu pro $r$ -tý faktor)**: *Produkční funkce* $F(x)$ *je separabilní*, jestliže**

**z nerovnosti** $F(x_1,\dots, x_r,\dots, x_n) \le F(x_1,\dots, x_r^*,\dots, x_n)$

**(4.5)** **vyplývá vztah** $F(x_1^*,\dots, x_r,\dots, x_n^*) \le F(x_1^*,\dots, x_r^*,\dots, x_n^*)$

**pro jakákoliv dosazení hodnot ostatních faktorů** $x_j, x_j^*\ j \neq r$ **. Zvýšení, resp. snížení produkce způsobené pouze parciálním působením** $r$ **-tého (*separabilního*) faktoru, je** zcela **nezávislé na jakýchkoliv** dosazených **hodnotách ostatních faktorů.**

***Funkcionální separabilita* je definována ve vztahu k mezní míře substituce**. **Proveďme** za tímto účelem **rozdělení všech** $n$ **výrobních faktorů do několika,** řekněme $q$ **disjunktních skupin, a to tak, aby do stejné skupiny patřily faktory, které jsou** v nějakém ohledu **příbuzné. Dostaneme rozdělení** $n$ **faktorů do** $q$ **skupin při četnostech skupin** $n_1, n_2,\dots, n_q$**, kde** $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$ **. Funkcionální separabilita je charakterizována nezávislostí mezní míry substituce** (mezi dvěma uvažovanými faktory) **na změnách kterékoliv jiného výrobního faktoru** (mimo oba uvažované)**.**

**Definice 14A Řekneme, že – při výše uvedeném rozkladu** $n$ **výrobních faktorů do** $q$ **- *dvojice faktorů*** $i, j$ ***je slabě funkcionálně separabilní*, jestliže pro mezní míru substituce** $m_{ji} = \partial x_i / \partial x_j$ **platí podmínka**

**(4.6)** $$\frac{\partial\left(\dfrac{F_i}{F_j}\right)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{nebo také} \quad F_j \cdot F_{jk} - F_k \cdot F_{jk} = 0\ ,\ k \in \{1,2,\dots, n\},\ k \neq i, j$$ [2]

**Definice 14B Řekneme, že *produkční funkce*** $F(x_1,\dots, x_r,\dots, x_n)$ **je *silně funkcionálně separabilní* s ohledem na přijaté dělení** $n$ **výrobních faktorů do** $q$ **skupin, jestliže vztah (4.6) platí pro všechny faktory** $i$ **z** $r$ **-té skupiny a všechny faktory** $j$ **z** $s$ **-té skupiny ( přičemž** $r$ **-tá a** $s$ **-tá skupina jsou disjunktní )**[3]

---

[2] Je zřejmé, že anulovaný **výraz obsahující** jen **parciální derivace produkční funkce získáme** pravidlem pro derivaci zlomku podle $x_k$ ( po na vynásobení $F_j^2$ ).

[3] **Slabá i silná separabilita mohou platit lokálně** v bodě/konkrétní faktorové kombinaci) **nebo globálně** (ve všech bodech faktorového prostoru).

Vyjádříme-li pojmy ***slabé** a **silné separability*** volněji,můžeme vyslovit toto: **Při rozdělení všech $n$ faktorů disjunktně a vyčerpávajícím způsobem do $q$ skupin:**

***Množina faktorů patřící do $r$-té skupiny je slabě separabilní*** vůči všem ostatním faktorům, ***jestliže mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma $x_j, x_k$ z $r$-té skupiny je nezávislá na změně*** kteréhokoliv jiného ***faktoru nepatřícího do této skupiny.***

***Produkční funkce*** *pak* ***je slabě separabilní, jestliže tato vlastnost platí pro všechny skupiny z přijatého členění*** *všech* $n$ ***faktorů do*** $q$ ***skupin,*** $q < n$ **.**

***Silná*** *(také* ***aditivní****)* ***separabilita produkční funkce předpokládá, že slabá separabilita platí pro faktory z libovolné dvojice tříd (****$r$* ***-té,*** *$s$* ***-té) vůči všem ostatním faktorům*** (při přijatém členění všech $n$ faktorů do $q$ tříd).

Poznámka **V definici aditivní separability se připouští, že** $s = r$ (jde tedy o dvojici téže skupiny), **takže *ze silné separability vyplývá slabá*.**

Nesporně **zajímavým zjištěním je** dále **skutečnost, že funkcionální separabilita (slabá i silná) má bezprostřední vliv** také **na strukturní tvar produkční funkce, jestliže tato funkce je separabilní. Blíže o tom vypovídá následující věta :**

**VĚTA 2 [Goldman a Uzawa 1964]**

**a) Produkční funkce** $F(x)$ **je *globálně slabě separabilní*** s ohledem na přijaté dělení do $q$ $(q > 2)$ disjunktních tříd**, právě tehdy, když lze tuto funkci vyjádřit zápisem**

**(4.7)** $$F(x) = G\left(f^1(x^1), f^2(x^2), \ldots, f^q(x^q)\right),$$

**kde** $G$ **je rostoucí funkce a** $f^i(x^i)$ **jsou** nějaké **funkce,** z nichž **každá má za argumenty pouze faktory náležející do** $i$ **-té třídy** $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ **.**

**b) Produkční funkce** $F(x)$ **je *globálně silně separabilní*** s ohledem na přijaté dělení do $q$ $(q > 2)$ disjunktních tříd**, právě tehdy, když lze tuto funkci vyjádřit zápisem**

**(4.8)** $$F(x) = G\left(\sum_{i=1}^{q} f^i(x^i)\right),$$

**kde** $G$ **je rostoucí funkce a** $f^i(x^i)$ **jsou funkce, které mají za argumenty** pouze **faktory náležející do** $i$ **-té třídy** $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ **.**

**Pokud je produkční funkce *separabilní*, je** takto **umožněna** jistá **decentralizace při rozhodování, neboť lze optimalizovat po krocích** (krok ve výběru optima v dané skupině není nijak podmíněn situací v jiné skupině)**.** Za zmínku stojí, že z historického pohledu vymezuje určité funkční tvary. **Lze** totiž **ukázat, že *Cobb-Douglasova funkce* a *ACMS-funkce* jsou** (explicitně) ***silně separabilní*** **, jakož i to, že *Hanochovy CRESH a CDE- funkce* jsou** (implicitně) ***silně separabilní*.**

Častým **předmětem zkoumání je vliv proporcionálního zvyšování množství faktorů na hodnotu produkce.** K tomuto účelu je nejčastěji uplatňován pojem homogenity funkce představován definicí

**Definice 15 - Homogenita** produkční funkce

**Jestliže pro produkční funkci $F(x_1, x_2, ...., x_n)$, pro kterou platí *Shephardovy axiomy* (P1) - (P6) platí navíc vztah**

**(4.9)** $$F(\lambda x_1, \lambda x_2, ...., \lambda x_n) = \lambda^s . F(x_1, x_2, ...., x_n),$$

**kde** $\lambda$ **je** libovolná **kladná skalární hodnota** určující míru proporcionální změny vstupů **a** $s$ **je pevná konstanta** (může být i záporná, zpravidla se ale přijímá omezení $s \geq -$ ) udávající míru zvýšení/snížení funkční hodnoty v uvažovaném vztahu (**stupeň homogenity**), řekneme je ***produkční funkce je homogenní stupně*** $s$ **. Jestliže** $s = 1$**, řekneme, že *funkce je lineárně homogenní*.** Podle velikosti této konstanty **se mluví o rostoucích** $(s > 1)$**, klesajících** $(s < 1)$ **či** $(s = 1)$ **konstantních výnosech** z rozsahu výroby.[4]

**Poznámka** **Charakteristickou** geometrickou **vlastností izokvant generovaných lineárně homogenní produkční funkcí** $F(x)$ **je rovnoběžnost tečen k těmto izokvantám v bodech, kterými jsou průsečíky izokvant s paprsky** (polopřímkami) **vycházejícími z počátku** souřadnic. Je tomu tak proto, že ***mezní míra substituce*** mezi kterýmikoliv dvěma faktory ***zůstává při proporční změně všech faktorů konstantní*. Jde o homogenní funkci stupně** $0$ **, což ukazuje následující lemma:**

**Lemma Nechť produkční funkce** $F(K, L)$ **je homogenní stupně 1. Pak je mezní míra substituce** $r_{KL}$ **mezi faktory** $K, L$ u této produkční funkce **homogenní funkce stupně 0.**

***ověření:*** **Nechť platí (4.9)** pro $s = 1$ **. Pak pro** $r_{KL} = \frac{F_L}{F_K}$ **platí dle VĚTy 4, že je-li** $F(x)$ **lineárně homogenní** (produkční) **funkce, pak platí pro** jakoukoliv **její parciální derivaci** $F_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$**, že tato je homogenní stupně 0, tedy přirozeně i pro** $F_L$ **a** $F_K$ **. Platí-li takto pro** libovolné $\lambda > 0$ $F_L(\lambda K, \lambda L) = F_L(K, L)$ **a** $F_K(\lambda K, \lambda L) = F_K(K, L)$**, pak zřejmě platí též** $$r_{KL}(\lambda K, \lambda L) = \frac{F_L(\lambda K, \lambda L)}{F_K(\lambda K, \lambda L)} = \frac{F_L(K, L)}{F_K(K, L)} = r_{KL}(K, L)$$ □ .

**Mezi lineárně homogenní produkční funkce lze zařadit *ACMS funkci*** (při jakékoliv hodnotě substitučního parametru $\rho$ ), **lineární produkční funkci. *Cobb-Douglasova funkce* je lineárně homogenní pouze tehdy, je-li součet mocninných parametrů roven 1** (to platí pro dvou- i vícefaktorovou). **Funkce *ADDILOG* není homogenní žádného stupně** (pokud nemá všechny mocninné parametry shodné, což by byl ovšem netypický, „degenerovaný" případ).**Lineárně homogenní jsou i některé flexibilní funkční tvary** jako je ***zobecněný Leontief* a *odmocnina kvadratické funkce*** bez ohledu na počet zařazených výrobních faktorů. **Produkční funkce *TRANSLOG* může být homogenní při více argumentech, ne však jako dvoukomoditní). *Kvadratická funkce*** (vzata jako produkční je nevhodná) **je homogenní 2.stupně.**

---

[4] **Vztah homogenity určitého stupně a povahy výnosů z rozsahu produkce byl diskutován na jiném místě.**

**Souvztažnou vlastností** k homogenitě, **je pojem *homoteticita*, zavedený Shephardem**

**Definice 15 - Homoteticita** produkční funkce

**Řekneme, že produkční funkce je homotetická, lze-li ji vyjádřit ve tvaru:**

**(4.10)** $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left[G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right],$$

**kde** $G$ **je nějaká homogenní funkce stupně** $1$ **vstupních výrobních faktorů a** $\Phi$ **je nezáporná, spojitá a rostoucí funkce jedné proměnné** $(z)$ **s vlastnostmi** $\Phi(0) = 0;\ \lim_{z\to\infty} \Phi(z) = +\infty$ **.**

<u>Poznámka</u> **Lze snadno ukázat, že z homogenity kteréhokoliv** (nezáporného) **stupně vyplývá homoteticita, nikoliv však obráceně.**

Podobně jako u lineární homogenity **vyznačuje se struktura izokvant homotetické funkce specifickou vlastností. K určení celé množiny izokvant postačuje znalost "jednotkové izokvanty", tj. izokvanty odpovídající produkci** $y^0 = 1$**. Všechny ostatní izokvanty můžeme získat radiální expanzí z počátku souřadnic tak, že libovolnou kombinaci faktorů na této izokvantě vynásobíme poměrem** $\frac{\Phi^{-1}(y)}{\Phi^{-1}(1)}$**. Tvar izokvant je** tedy **nezávislý na objemu produkce** $y$ **.**

**Ve vztahu k pružnosti substituce** libovolných dvou faktorů **lze u homotetické produkční funkce ukázat, že se tato může měnit při pohybu po zvolené izokvantě, avšak zůstává konstantní podél paprsku vycházejícího z počátku** (tj. nemění-li se proporce faktorů)**.**

**Definice16 - Linearita v parametrech** (*po eventuální transformaci závisle proměnné* )

**(4.11)** $$F(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n) = a + b_1 g_1(x_1) + \ldots + b_n g_n(x_n)$$

**Výhodnost** *nelineárních* **tvarů, jež jsou lineární v parametrech, je snadnost, se kterou se** zpravidla **provede odhad parametrů těchto funkčních tvarů (produkční, nákladové aj.). V regresním vztahu zde stačí vzít jako regresory transformace původních veličin** $z_i = g_i(x_i)$ **, přičemž parametry odhadnuté ze vztahu**

**(4.11A)** $$y_t = a + b_1 z_{t1} + \ldots + b_n z_{tn} + \varepsilon_t$$

**si zachovají stejně příznivé** statistické **vlastnosti,** jako by tomu bylo v lineárním vztahu. **Typickým příkladem je mnohočlen v *n*** transformovaných **proměnných.**

**(4.12)** $$F(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n) = g^{-1}\left(a + b_1 g_1(x_1) + \ldots + b_n g_n(x_n)\right),$$

**u něhož po transformaci nabudeme tvar**

**(4.12A)** $$w_t = g(y_t) = a + b_1 z_{t1} + \ldots + b_n z_{tn} + \varepsilon_t$$

Vůbec nejznámější **příklad funkce lineární v parametrech po transformaci je *Cobb-Douglasova funkce*** *s exponenciálním připojením náhodných složek*

$$y = \beta_0 . x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots . x_n^{\beta_n} . exp(\varepsilon_t)$$

**Transformace je zde zřejmě logaritmická. Ve stochastickém zápisu**

$$w_t = ln(y_t) = \beta_0 + \beta_1 ln(x_{t1}) + \beta_2 ln(x_{t2}) + .. + \beta_n ln(x_n) + \varepsilon_t .$$

**Definice 17- *Kvazilinearita a zobecněná kvazilinearita***

**Pojem lineární aditivity zobecnil Wolfgang Eichhorn v [3] tak, že na jednotlivé prvky vztahu (4.11) uplatňuje spojitou monotónní transformaci, k níž,** jak známo, existuje inverzní. **Ekonomický vztah** (produkční, nákladová, poptávková funkce) **může být za těchto okolností zapsán jako:**

**(4.13)** $F(x_1,\ldots, x_s,\ldots, x_n) = g^{-1}(a + b_1 g(x_1) + \ldots + b_n g(x_n))$, **kde**

$g$ **je spojitá monotónní funkce a dále** $b$, $a_1,\ldots, a_n$ **jsou vhodné konstanty (**$a_i$ **nenulové).** ***ACMS – funkce*** (vážená střední hodnota řádu $-\rho$ ).

**(4.13A)** $F(x_1,\ldots, x_s,\ldots, x_n) = \gamma(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \delta_n x_n^{-\rho})^{-1/\rho}$ , **kde**

$\gamma > 0, \rho \in (-1,0) \cup (0,+\infty), \delta_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$ je zřejmě **kvazilineární, vezmeme-li** $b_i = \delta_i$ ,

$g(z_i) = z_i^{-\rho}, a = 0$ **a** $g^{-1}(y) = \gamma . y^{-1/\rho}$ .

**Zobecněním kvazilinearity je případ, kdy inverzní funkce** $g$ **ve vztahu (4.13) není totožná s jednoargumentními funkcemi** uvnitř závorky pravé strany**.** ***Zobecněnou kvazilineární funkci*** $F$ **lze tedy zapsat ve tvaru:**

**(4.14)** $F(x_1,\ldots, x_s,\ldots, x_n) = h(g_1(x_1),\ldots, g_s(x_s),\ldots, g_n(x_n))$ , **kde**

$g_1,\ldots, g_n$ **jsou** vesměs **spojité a ryze monotónní funkce.** Oproti **(4.13) se nevyžaduje ani symetrie vnitřních funkcí** $g_i$, $i = 1,\ldots, n$ **vůči jednotlivým argumentům.**

**Typickou *zobecněně kvazilineární funkcí* je *ADDILOG* , který zapsaný jako**

**(4.14A)** $F(x_1,\ldots, x_s,\ldots, x_n) = \beta_1 x_1^{\alpha_1} + \beta_2 x_2^{\alpha_2} + \ldots + \beta_n x_n^{\alpha_n}$ **, kde**

$\beta_i > 0, \alpha_i > 0, x_i \geq 0$, **vyhovuje zápisu zobecněné kvazilinearity při konkretizací** $g_i(x_i) = \beta_i x_i^{\alpha_i}, i = 1,2,\ldots, n, h(z) = z$ .***ADDILOG*** **ale** zřejmě ***není kvazilineární*** **ve smyslu definice (4.13) .**

**Předchozí výčet vlastností –** ač ne vyčerpávající **– umožňuje provést jistou typologii v rámci produkčních nebo nákladových funkcí.** Přirozeně, **některé z těchto vlastností** (např. ***substitučnost*** vs. ***komplementarita***) **se vzájemně vylučují. Daný výrobní vztah je proto třeba vyšetřovat obezřetně a mít na paměti, že ne ve všech oblastech faktorového prostoru musí funkce, resp. vztah některých jejich výrobních faktorů, vykazovat stejné chování.**