

# MAKROEKONOMICKÉ MODELOVÁNÍ – PŘEDNÁŠKA 10

## RBC model s růstem populace a technologie

Původní model, populace v modelové ekonomice se nemění. Nyní zavedeme do modelu růst populace i růst technologického pokroku. Růst jako takový nás nezajímá, spíš hospodářské cykly, ale je dobré mít model konzistentní s dlouhodobými pozorováními v datech – GDP na hlavu vykazuje trvalý, kladný růst.

Populace roste konstantním tempem  $n$ , tedy

$$N_t = (1 + n)^t N_0$$

zkráceně  $(1 + n)^t = \eta^t$  a  $N_0$  normujeme  $N_0 = 1$ . Tedy  $N_t = \eta^t$

Obdobně pro technologický pokrok (zlepšující práci)

$$A_t = (1 + g)^t A_0$$

opět po úpravách  $(1 + g)^t = \gamma^t$  a normování dostaneme  $A_t = \gamma^t$ .

Produkční funkce (v agregátních veličinách)

$$Y_t = z_t K_t^\alpha (\gamma^t H_t)^{1-\alpha}$$

vyjádření per capita (na hlavu)

$$y_t = z_t k_t^\alpha (\gamma^t h_t)^{1-\alpha}$$

Vyvážená růstová trajektorie (Balanced Growth Path, BGP), analogie ke steady-statu. Všechny proměnné ( $y, k, c$ ) rostou konstantním tempem (tempem technologického pokroku), odpracované hodiny na pracovníka jsou konstantní.

## Příklad

Problém sociálního plánovače

$$\max_{c_t, h_t, k_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c_t) + \psi \ln(1 - h_t)]$$

vzhledem k

$$K_{t+1} + C_t = (1 - \delta)K_t + z_t K_t^\alpha (\gamma^t H_t)^{1-\alpha}$$

$$c_t = \frac{C_t}{N_t}, h_t = \frac{H_t}{N_t} \text{ a } k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}.$$

Těžké najít rozhodovací pravidla v rostoucí ekonomice. Převědeme na stacionární problém (vyjádříme ve veličinách které nerostou, např.  $\tilde{c}_t = \frac{c_t}{\eta^t \gamma^t}$  neboli  $\tilde{c}_t = \frac{c_t}{\gamma^t}$ ).

Užitková funkce

$$\ln c_t + \psi \ln(1 - h_t) = \ln \tilde{c}_t + \ln \gamma^t + \psi \ln(1 - h_t)$$

Agregátní rozpočtové omezení vydělíme  $\eta^t \gamma^t$  a dostaneme

$$\tilde{k}_{t+1} \gamma \eta + \tilde{c}_t = (1 - \delta) \tilde{k}_t + z_t \tilde{k}_t^\alpha (h_t)^{1-\alpha}$$

Řešením tohoto problému jsou podmínky optimality

- Intratemporální

$$\frac{\psi}{1-h_t} = \frac{1}{\tilde{c}_t} (1-\alpha) z_t \tilde{k}_t^\alpha (h_t)^{-\alpha}$$

- Intertemporální (Eulerova)

$$\frac{\gamma\eta}{\tilde{c}_t} = \beta E_t \frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} \left[ (1-\delta) + z_t \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} (h_t)^{1-\alpha} \right]$$

Na BGP jsou  $\tilde{c}_t$ ,  $\tilde{k}_t$ ,  $\tilde{y}_t$  a  $h_t$  jsou konstantní. Tím pádem  $c_t$ ,  $k_t$  a  $y_t$  rostou tempem  $\gamma$  ( $g$ ).

Jak to vypadá s cenama?

Reprezentativní firma najímá kapitál a práci.

$$\max_{K_t, H_t} z_t K_t^\alpha (\gamma^t H_t)^{1-\alpha} - w_t H_t - R_t K_t$$

Podmínky prvního řádu

$$w_t = z_t (1-\alpha) \gamma^t \left( \frac{\tilde{k}_t}{h_t} \right)^\alpha$$

$$R_t = z_t \alpha \left( \frac{\tilde{k}_t}{h_t} \right)^{\alpha-1}$$

Na BGP je nájemní cena kapitálu  $R$  (a tím pádem i reálná úroková míra  $r = R - \delta$ ) konstantní a reálná mzda  $w$  roste konstantním tempem  $\gamma$  ( $g$ ).

Podmínky rovnováhy jsou v rostoucí ekonomice v zásadě stejné jako ve stacionární ekonomice (díky transformaci veličin).

## Kalibrace

Rostoucí ekonomika – některé parametry (s časovým rozměrem) se budou lišit. Růst populace  $\eta = 1.01$ , růst technologického pokroku  $\gamma = 1.02$ .

- Podíl odměn kapitálu na důchodu  $\alpha = .33$  (neovlivněn).
- Parametr  $\psi$  v uživatelské funkci nastavit tak, aby jednotlivec pracoval 1/3 svého disponibilního času (neovlivněn).

$$\psi = (1-\alpha) \frac{\tilde{y}_t}{h_t} \frac{1-h_t}{\tilde{c}_t}$$

např. pro  $C/Y = 0.75$  je  $\psi = 1.77$ .

- Míra depreciace  $\delta$  z rovnice pro vývoj kapitálu (na BGP)

$$\gamma\eta\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\tilde{k}_t + \tilde{i}_t$$

$$\delta = \frac{I}{K} + 1 - \gamma\eta$$

S  $I/Y = 0.25$  a  $K/Y = 2.6$  je  $I/K = 0.0962$  a  $\delta = 0.066$ .

- Diskontní faktor  $\beta$  z Eulerovy rovnice.

$$\beta = \frac{\gamma\eta}{\alpha \frac{y}{k} + 1 - \delta}$$

$$\beta = 0.971.$$

## Aplikace

Studium Velké krize (krizí) pomocí RBC modelu. Růstové účetnictví

$$\frac{Y_t}{N_t} = z_t \left( \frac{K_t}{N_t} \right)^\alpha \left( \gamma^t \frac{H_t}{N_t} \right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y_t}{N_t} = z_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left( \frac{K_t}{Y_t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( \gamma^t \frac{H_t}{N_t} \right)$$

Po logaritmování

$$\ln y_t = \frac{1}{1-\alpha} \ln z_t + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{k_t}{y_t} + t \ln \gamma + \ln h_t$$

Rozklad detrendovaného HDP na příspěvky jednotlivých faktorů. (Před krizí na trendu, = 100). Vývoj produktivity (TFP) převzatý z dat. Kalibrace modelu, simulace vývoje veličin během krize, porovnání s daty (TFP je exogenní).

Obrázek: Srovnání predikce modelu (čárkovaná čára) s daty (plná čára).

Nezodpovězené otázky: Co je za propadem TFP?, Proč se odpracované hodiny nevrátily na původní úroveň jak model předpovídá?