Makroekonomické modelování – přednáška 2

1 Jednoduchý makroekonomický model

- Reprezentativní firma, reprezentativní domácnost
- optimalizace (maximalizace cílové funkce vzhledem k rozpočtovému omezení
- mikro přístup k makroeknomii
- konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)
- nejprve statický model

1.1 Struktura modelu

- N identických domácností
- 2 druhy statků: spotřeba (c), volný čas ($0 \leq \ell \leq 1$)
- užitková funkce $u(c, \ell)$
- M identických firem
- 2 výrobní faktory: práce (n), kapitál (k)
- agregátní zásoba kapitálu K je dána exogenně
- produkční funkce $y = zf(k, n)$, homogenní stupně 1
- tři trhy: výstupu/spotřeby, práce, kapitálu
- dvě relativní ceny: reálná mzda (w), reálná nájemní cena kapitálu (r) (spotřební statek je *numeraire* s cenou 1)
- všichni agenti jsou příjemci cen

1.2 Domácnosti

Maximalizují užitkovou funkci

$$U = u(c, \ell)$$

vybírají c a l vzhledem k rozpočtovému omezení

$$c = w(1 - \ell) + r(K/N) \tag{1}$$

a $0 \leq l \leq 1$, $c \geq 0$ a kde $(1 - \ell)$ je nabídka práce. Každá domácnost vlastní stejný podíl K.
Podmínka prvního řádu

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = w \tag{2}$$

(1) a (2) lze vyřešit pro c a ℓ jako funkce w, r a K/N. (Vlastnosti užitkové funkce zajišťují, že existuje pouze jedno jedinné řešení.)

1.3 Firmy

vybírají vstupy – práci a kapitál, aby maximalizovali zisk (w a r berou jako dané)

$$\max_{k,n}[zf(k,n) - rk - wn]$$

Podmínky prvního řádu

$$zf_1(k,n) = r \tag{3}$$

$$zf_2(k,n) = w \tag{4}$$

Produkční funkce

$$y = zf(k,n)$$

kde z je exogenní šok v produktivitě má konstatní výnosy z rozsahu (homogenní stupně 1, platí Eulerův teorém)

$$\lambda y = zf(\lambda k, \lambda n) \tag{5}$$

$$zf(k,n) = zf_1(k,n)k + zf_2(k,n)n \tag{6}$$

rovnice (3), (4) a (6) implikují, že maximální zisk je = 0. Z toho vyplývají dvě věci:

- nemusíme se starat, jak je zisk firem distribuován (např. dividendy, podíly na zisku)
- předpokládejme, že k^* a n^* jsou optimální množství výrobních faktorů, pak musí platit
$$zf(k,n) - rk - wn = 0 \tag{7}$$
pro $k = k^*$ a $n = n^*$. Ale (7) platí i pro $k = \lambda k^*$ a $n = \lambda n^*$, kde $\lambda > 0$ díky CRS.

Tím pádem není určena optimální velikost firmy, můžeme mít $M = 1$ – jedna reprezentativní firma. (Počet firem je irelevantní pro definici konkurenční rovováhy)

1.4 Konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)

Soubor množství c, l, n, k a cen w, r, které splňují tyto podmínky

1. Každá domácnost vybírá c a ℓ optimálně při daných cenách w a r (rovnice 1 a 2)
2. Reprezentativní firma vybírá n a k optimálně při daných cenách w a r (rovnice 3, 4 a 5)
3. Trhy se čistí (chování domácností a firem je vzájemně konzistentní)
    - trh práce
    $$N(1-\ell) = (M)n \tag{8}$$

- trh kapitálu

$$K = (M)k \tag{9}$$

- trh zboží

$$(M)y = Nc \tag{10}$$

Nabídka = poptávka. Pokud je přebytek poptávky na jednotlivých trzích

$$Nc - y + w[n - N(1-\ell)] + r[k - K]$$

Z (1) a (7) vyplývá

$$Nc = w(1-\ell)N + rK \qquad \text{a} \qquad y - rk - wn = 0$$

$$Nc - y + w[n - N(1-\ell)] + r[k - K] = 0 \tag{11}$$

Pokud 2 ze 3 podmínek (8, 9 a 10) platí, tak podle (11) platí i 3. podmínka.

Walrasův zákon – pokud je Q trhů a $Q-1$ je jich v rovnováze, pak i poslední trh je v rovnováze.

Využijeme Walrasův zákon. Máme 8 rovnic a 7 proměnných (neznámých) w, r, n, k, c, ℓ a y. Můžeme 1 rovnici eliminovat, např. (9).
Počet spotřebitelů je pro řešení irelevantní, můžeme $N = 1$ a analyzovat ekonomiku s jedním reprezentativním spotřebitelem – domácností. Konkurenční rovnováha (CE) má stejné vlastnosti jako když máme mnoho firem a spotřebitelů.
Řešíme jako systém rovnic, využijeme $n = (1-\ell)$

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = zf_2(k, 1-\ell) = w \tag{12}$$

$$c = zf(k, 1-\ell) \tag{13}$$

$$r = zf_1(k, 1-\ell), \qquad w = zf_2(k, 1-\ell) \tag{14}$$

dosazením za c dostaneme

$$\frac{u_2(zf(k,1-\ell),\ell)}{u_1(zf(k,1-\ell),\ell)} = zf_2(k, 1-\ell) \tag{15}$$

vyřešíme pro ℓ ($k = k_0$ je dáno) a zpětně dosadíme do výše uvedených rovnic získáme řešení pro r, w, n a c. Máme model, který umíme vyřešit a který můžeme studovat: co se stane, když ...
Výstup (na hlavu) $y = zf(k, 1-\ell)$ je určen

- kapitálovou zásobou (k)
- produktivitou (z)
- preferencemi pro volný čas ($1-\ell$)

Příklad z Williamsona (růst produktivity).

1.5 Paretovo optimum

je taková alokace,[1] že neexistuje jiná alokace, kterou by nějaký agent striktně preferoval a jakýkoliv jiný agent by si nepohoršil. ufff
My máme jen jednoho agenta :) Můžeme uvažovat o sociálním plánovači, který

- určuje vstupy na výrobu reprezentativní firmě
- nutí spotřebitele nabízet náležité množství práce
- distribuuje statky spotřebitelům – tak aby na tom byl spotřebitel co možná nejlépe

Sociální plánovač určí Pareto optimum řešením následujícího problému

$$\max_{c,\ell} u(c,\ell) \qquad \text{subject to} \qquad c = zf(k, 1-\ell)$$

Můžeme řešit dosazením, výsledkem je

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = zf_2(k, 1-\ell) \tag{16}$$

což je stejná rovnice jako v případě CE (competitive equilibrium – konkurenční rovnováha). CE je stejné jako Paretovo optimum (řešení sociálního plánovače).[2]

1.6 Teorémy blahobytu (Welfare theorems)

Za určitých podmínek (definováno níže)

1. Konkurenční rovnováha je Pareto optimální (řešení problému SP)
2. Jakékoliv Paretova optima (alokace SP) může být dosaženo vhodným přerozdělením počátečního vybavení (zdrojů)

Podmínky: absence externalit, veřejných statků, rostoucích výnosů z rozsahu, asymterických informací, distorzních daní, nutnost kompletních trhů.

1.6.1 Implikace:

- V makroekonomii, pokud vysvětlíme určitý jev (např. hospodářské cykly) pomocí modelu konkurenční rovnováhy, kde platí 1. WT $\Rightarrow$ není prostor pro vládní intervence
- Rovnost CE a PO je dobrá z hlediska výpočetního. Je jednodušší získat řešení (CE), když vyřešíme problém SP a dostaneme rovnovážná množství a pak vyřešíme pro ceny (než řešení všeho zároveň)

[1] Plán produkce a distribuce statků mezi ekonomické agenty.
[2] Když $u(.;.)$ je striktně konkávní a $f(.;.)$ striktně kvazikonkávní, existuje jediné Pareto optimum a CE je také jediné.

1.7 Dynamická ekonomie

- Domácnosti se rozhodují, kolik spotřebují dnes a kolik ušetří.
- Žijí T období
- užitková fce je časově separabilní (2 krát diff, striktně rostoucí a striktně konkárvní)

$$U[(c_0,\ell_0),(c_1,\ell_1),(c_2,\ell_2)\dots(c_T,\ell_T)] = u(c_0,\ell_0)+\beta u(c_1,\ell_1)+\beta^2 u(c_2,\ell_2)+\dots\beta^T u(c_T,\ell_T)$$

$\beta \in (0,1)$ je *diskontní faktor*, vyjadřující netrpělivost domácností ve spotřebě
Někdy se používá *diskontní míra* ρ, přičemž

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

Domácnosti jsou vybaveny aktivy (bondy – obligace), $a_0 \geq 0$.
Rozpočtové omezení

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1-\ell_t) + (1+r_t)a_t$$

Na začátku má a_0, a co na konci? Může zemřít zadlužená, omezíme ji, aby $a_{T+1} \geq 0$. Ale domácnost nemá důvod něco nechávat dědicům, když ví, kdy umře, proto $a_{T+1} = 0$.[3]
Maximalizační problém

$$\max_{c_t, a_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t,\ell_t)$$

subject to

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1-\ell_t) + (1+r_t)a_t$$

a $c_t \geq 0$ a $a_{T+1} \geq 0$. Nutné podmínky optimality (jsou i postačující). Řešení pomocí Lagrangiánu. Podmínky prvního řádu (FOC)

$$u_c(c_t,\ell_t) = u_c(c_{t+1},\ell_{t+1})\beta(1+r_{t+1})$$

Eulerova rovnice

$$\frac{u_c(c_t,\ell_t)}{\beta u_c(c_{t+1},\ell_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

Stav, kdy spotřeba a úroková míra jsou v čase konstatní: steady-state, $c_t = c_{t+1} = c$, $r_t = r_{t+1} = r$.

$$\frac{1}{1+\rho} = \beta = \frac{1}{1+r}$$

V steady-statu je $\rho = r$.
Řešení: Rozpočtové omezení rozepíšeme pro $t+1$ a dosadíme do Eulerovy rovnice. Ceny jsou dané $\{w_t, r_t\}_{t=0}^T$, plus máme předpoklad $l_t = 0$, tj. domácnost pouze pracuje. Potřebujeme vybrat a_t, a_{t+1}, a_{t+2}. Diferenční rovnice 2. řádu (nelineární).

[3] Pro $T = \infty$ je to složitější, později.

Máme celkem $T+2$ proměnných: $\{a_t\}_{t=0}^{T+1}$ a $T+2$ rovnic: počáteční podmínku a_0 a koncovou podmínku $a_{T+1}=0$ a T Eulerovek. (Počet neznámých = počet rovnic. Bude to mít řešení a bude jediné, díky vlastnostem užitkové a produkční fce.)
Vybereme konkrétní tvar užitkové funkce, použijeme aproximaci (linearizace – naučíme se později) a systém rovnic můžeme vyřešit (nejlépe pomocí nějakého softwaru).

Rozpočtové omezení pro t a $t+1$, když $l_t=0$

$$c_t = w_t + (1+r_t)a_t - a_{t+1}$$

$$c_{t+1} = w_{t+1} + (1+r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}$$

Eulerova rovnice

$$u_c[w_t + (1+r_t)a_t - a_{t+1}] = \beta(1+r_{t+1})u_c[w_{t+1} + (1+r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}]$$