Makroekonomické modelování – přednáška 3

1 Chování v prostředí nejistoty

1.1 Teorie očekávaného užitku

Něco teorie z mikroekonomie, opakovaní??

- V deterministickém světě – spotřebitelovy preference jsou popsány dle seřazení koše statků
- V prostředí nejistoty – preference spotřebitele podle seřazení jednotlivých loterií (her), podle očekávané hodnoty užitku
- 1 statek, spotřeba c, užitková funkce $u(c)$
- 2 loterie, $i = A, B$.
- Loterie i přinese c_i^1 jednotek spotřeby s pravděpodobností p_i a c_i^2 jednotek spotřeby s pravděpodobností $(1 - p_i)$, kde $0 < p_i < 1$.

Definice

Očekávaný užitek z loterie i (součet pravděpodobnosti x užitek)

$$p_i u(c_i^1) + (1 - p_i) u(c_i^2)$$

Spotřebitel striktně prefereuje loterii A před B

$$p_A u(c_A^1) + (1 - p_A) u(c_A^2) > p_B u(c_B^1) + (1 - p_B) u(c_B^2)$$

preferuje B před A pokud $<$ a je indiferentní pokud $=$.

1.2 Chování v prostředí rizika

Spotřebitel, (který maximalizuje užitek) je *rizikově averzní*, když je jeho užitková funkce (striktně) konkávní. Pokud je $u(c)$ striktně konkávní, implikuje to Jensenovu nerovnost

$$u[E(c)] \geq E[u(c)] \tag{1}$$

kde E je operátor očekávání (můžete chápat jako střední hodnotu). Jensenova nerovnost nám říká, že spotřebitel preferuje očekávanou hodnotu loterie (s jistotou) před loterií samotnou. Je rizikově averzní – je ochoten zaplatit za vyhnutí se riziku.

Něco jako důkaz

Pro milovníky mikroekonomie, ostatní můžou přeskočit.
Pokud spotřebitel obdrží konstantní spotřebu $\bar{c}$ s jistotou, tak potom (1) platí jako rovnost. V případě, že spotřeba je náhodná veličina, potom platí (1) se striktní nerovností. Vezmi tečnu k funkci $u(c)$ v bodě (E(c), u(E[c]). Tečna je dána funkcí

$$g(c) = \alpha + \beta c$$

když vezmeme očekávání (α a β jsou konstatny)

$$\alpha + \beta E[c] = u(E[c]) \tag{2}$$

Protože $u(c)$ je striktně konkávní, pak máme

$$\alpha + \beta c \geq u(c) \tag{3}$$

pro $c \geq 0$ a se striktní nerovností, pokud $c \neq E(c)$.
Dále pro striktní nerovnost. Operátor očekávání je lineární operátor, můžeme vzít očekávání rovnice (3) a vzhledem k tomu, že c je náhodná veličina dostaneme

$$\alpha + \beta E[c] > E[u(c)]$$

a použitím rovnice (2) dostaneme

$$u[E(c)] > E[u(c)]$$

Ukázali jsme, že Jensenova nerovnost platí.

Příklad

Loterie přinese spotřebiteli c_1 s pravděpodobností p a c_2 s s pravděpodobností $1 - p$. kde $0 < p < 1$ a $c_2 > c_1$.

$$u(pc_1 + (1-p)c_2) > pu(c_1) + (1-p)u(c_2)$$

Užitek z očekávané hodnoty hry $u[E(c)] >$ *očekávaný užitek* ze hry $E[u(c)]$

Body na úsečce AB označují očekávaný užitek agenta pro danou pravděpodobnost p. Jensenova nerovnost je fakt, že AB leží pod funkcí $u(c)$. Vzdálenost DE je disutilita spojená s rizikem. Vzdálenost roste s větším zakřivením užitkové funkce – větší averze k riziku.

1.2.1 Měření averze k riziku

Při maximalizaci očekávaného užitku jsou výběry dělané v podmínkách nejistoty invariantní (neměnné) při afinních transformacích užitkových funkcí.

$$v(c) = \alpha + \beta u(c)$$

kde α, β jsou konstanty, $\beta > 0$. Pak platí

$$E[v(c)] = \alpha + \beta E[u(c)]$$

protože E je lineární operátor. Z toho vyplývá, že loterie jsou seřazeny stejným způsobem, ať uvažujeme funkci $v(c)$ nebo transformovanou $u(c)$.

Jakékoliv měřítko averze vůči riziku by mělo zahrnovat druhou derivaci $u''(c)$, protože averze roste, když se zvyšuje zakřivení funkce. Ale, pro transformovanou funkci $v(c)$ máme

$$v''(c) = \beta u''(c)$$

takže druhá derivace není invariantní vůči afinním transformacím (je tam ta β). Takže samotná druhá derivace k měření nestačí. Měřítko, které je invariantní vůči afinním transformacím je:

1.2.2 Koeficient absolutní averze vůči riziku

$$ARA(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

např. funkce, která má konstatní ARA pro všechna c je

$$u(c) = 1 - e^{-\alpha c}$$

$ARA(c) = \alpha$ vzhledem k c. (empiricky + experimentálně, spíše užitková funkce s klesající ARA)

1.2.3 Koeficient relativní averze vůči riziku

$$RRA(c) = -c\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

např. funkce s konstatní RRA (Constant Relative Risk Aversion, CRRA) pro všechna c je

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

$RRA(c) = \theta$ vzhledem k c, $ARA(c)$ je klesající vzhledem k c.
U mezičasového výběru, mluvíme o tzv. ISO elastické funkci, elasticita intertemporální substituce $\sigma = \frac{1}{\theta}$.
Hodně používaná specifikace, speciální případ CRRA fce je logaritmická funkce $\ln c$, (koeficient $RRA(c) = 1$). Důchodový a substituční efekt se vykrátí.

Rizikově neutrální spotřebitel

Užitková funkce je lineární ve spotřebě $u(c) = \beta c$, $\beta > 0$. Riziko zde nehraje žádnou roli.

$$ARA(c) = RRA(c) = 0$$

Anomálie

Teorie očekávaného užitku – vysvětluje chování lidí v prostředí rizika (např. při nákupu pojištění). Teorie se běžně v ekonomii používá, ale existují určité jevy, které nejsou s touto teorií konzistenstní, např. Allaisův paradox.
Nejprve výběr mezi loterií A a B. A dává 1 milión s jistotou, B dává 5 miliónů s pravděpodobností 0.1, 1 mil s pravděpodobností 0,89 a nebo 0 miliónů s pravděpodobností 0.01. Potom výběr mezi loteriíí C a D. C dává 1 milión s pravděpodobností 0.11 nebo 0 miliónů s pravděpodobností 0.89. a loterie D dává 5 miliónů s pravděpodobností 0.1 nebo 0 miliónů s pravděpodobností 0.9.

Cíl: Jak vypočítat hodnotu, že se nacházíme v daném stavu? (Markovské procesy, dynamické programování a iterace hodnotové funkce)

2 Modelování nejistoty

Formální zápis nejistoty

Máme proces s^t. s_t je stav (událost), množina stavů je $S = \{s_1, s_2, \dots, s_T\}$. Množina je konečná (např. počasí - jasno, oblačno, zataženo, deštivo, sněžení.)

Náhodný proces (to, že jsem v nějakém stavu) může být náhodné (nezávislé) nebo závislé. Jak to specifikujeme, záleží na nás. Budeme používat tyto formy:

- Proces je *iid* (prvky jsou navzájem nezávislé a mají stejné rozdělení). Je to čistá náhoda (hod mincí, hod kostkou)
- Proces s^t je homogenní Markovský řetězec (Markov chain, MC).

Vlastnosti MC:

- Proces (řetězec) se pohybuje ze stavu do stavu. Každý pohyb se nazývá krok.
- Pokud je řetězec ve stavu i, tak se přenese do stavu j s pravděpodobností p_{ij}
- p_{ij} je *podmíněná* pravděpodobnost (nezávislá na ničem jiném, krom toho, že jsme ve stavu i, minulé stavy jsou irelevantní)

$$p_{ij} = \text{Prob}(s_{t+1} = s_j | s_t = s_i) = \text{Prob}(s_{t+1} =_j | s_t = s_i, s_{t-1} = s_n \dots s_1 = s_1)$$

p_{ij} se také nazývá *přenosová* pravděpodobnost. Proces může zůstat ve stavu ve kterém je, a to se stane s pravděpodobností p_{ii}

Matice přenosových pravděpodobností je *přenosová matice.*

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

např.

$$P = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.40 & 0.60 \end{bmatrix}$$

- Řádek i udává pravděpodobnosti při pohybu ze stavu i (dnes) do všech možných stavů (zítra). Suma po řádku dává dohromady 1 (musíme někde skončit).
- Sloupec j udává pravděpodobnost, že skončíme ve stavu j (za podmínky, že jsme vyšli z arbitrárně zvoleného stavu i)

Jak vypočítat pravděpodobnost stavu někdy v budoucnu? Potřebujeme znát počáteční stav a přenosovou matici.

Příklad s počasím

Pravděpodobnost, že proces je dnes ve stavu i a bude ve stavu j za n dnů označíme $p_{ij}^{(n)}$
Jaká bude pravděpodobnost, že bude za 2 dny zataženo, když je dneska zataženo?
Přenosová matice

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Počasí dnes je zataženo, představováno vekotrem

$$x^{(0)} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

Počasí zítra (jeden den ode dneška) je

$$x^{(1)} = x^{(0)}P$$

Počasí pozítří (dva dny ode dneška) je

$$x^{(2)} = x^{(1)}P$$

$$x^{(2)} = x^{(0)}PP = x^{(0)}P^2$$

$$x^{(n)} = x^{(0)}P^n$$

V limitě

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty} x^{(0)}P^n$$

To, co jsme odvodili pro limitní případ výše je *nepodmíněná* pravděpodobnost. Pravděpodobnost, že skončíme v nějakém stavu, když nevíme nic o předchozích stavech (jak často pozorujeme stav i, nezávisle na počátečních podmínkách).[1] Matice P^∞ má všechny řádky jsou stejné, na počátečním rozdělení nezáleží.

Poznámka: Markovské řetězce zajistí při simulacích větší perzisentenci (pomáhají replikovat data), ale tato persistence není vysvětlena z ekonomického hlediska. Nevíme, proč k ní dochází.

3 Dynamické programování a Bellmanova rovnice

Optimalizační problémy (domácnosti, firem), které řešíme jsou **stacionární** – jsou nezávislé na čase (produkční funkce je stejná, rozpočtové omezení, chování domácností a firem rovněž atd.). Problém se v čase nemění, jediné co se mění jsou počáteční podmínky – hodnota proměnných určených v minulém období (rozhodnutím nebo náhodou).

> Tyto problémy můžeme rešit rekurzivně pomocí nástrojů **dynamického programování**.

Co to je? Hledáme *hodnotovou funkci* a *rozhodovací pravidlo.*

[1] Když je každý prvek matice P je kladný, pak existuje jediné nepodmíněnné rozdělení pravděpodobnosti.

- **Rozhodovací pravidlo** (decision rule někdy i policy function) nám říká, co máme udělat s proměnnými během tohoto období na základě počátečních podmínek (daných minulostí). Např. kolik investovat a kolik spotřebovat na základě daného stavu kapitáluů.

- **Hodnotová funkce** je např. hodnota diskontovaného užitku při maximalizaci v nekonečném horizontu (když byl maximalizační problém vyřešen) nebo hodnota firmy (daná současnou hodnotou cash-flow).

  Bellmanova rovnice

  Takhle bude vypadat příště

  $$v(k_t) = \max_{k_{t+1}}\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta E\ v(k_{t+1})\}$$

  nebo v rekursivní notaci

  $$v(k) = \max_{k'}\{u(k, k') + \beta E v(k')\}$$

  k je současný stav, k' je stav o krok vpřed.

Dneska budeme mít trochu jednodušší případ:

$$v(s_t) = c(s_t) + \beta P v(s_{t+1})$$

Příklad Jaká je čistá současná hodnota budoucího cash-flow firmy? Firma se může nacházet ve třech stavech: dobrý (Good), normální (Normal) a špatný (Bad). Hodnota cash-flow podle stavů je: pro Good 20 mil., pro Normal 10 mil. a pro Bad -5 mil.
Matice přenosových pravděpodobností, která může být zjištěna z historických dat, vypadá následovně

$$P = \begin{bmatrix} .55 & .40 & .05 \\ .35 & .55 & .10 \\ .20 & .20 & .60 \end{bmatrix}$$

Diskontní míra je r, nejprve deterministický případ. Bellmanova rovnice

$$v(s_t) = c(s_t) + \frac{1}{1+r}\, v(s_{t+1})$$

Stochastický případ – známe $c(s_t)$, ale budoucnost je nejistá (použijeme očekávání).

$$v(s_t) = c(s_t) + \frac{1}{1+r}\, E_t\, v(s_{t+1})$$

Víme, že nejistota je Markovská, takže

$$v(s_t) = c(s_t) + \frac{1}{1+r}\, P\, v(s_{t+1})$$

Známe možné stavy $s(.)$, funkci $c(.)$, parametr r a přenosovou matici P. Jediné, co neznáme je funkce $v(.)$.

Použijeme postup zvaný **iterace hodnotové funkce** (value function iteration, VFI). Vezmeme počáteční hodnotovou funkci $v_0(s_t)$ např. vektor 0 a řešíme iterací.

$$v_{i+1}(s_t) = c(s_t) + \frac{1}{1+r}\, P\, v_i(s_{t+1})$$

Iterujeme dokud to nezkonverguje, tj.

$$||v_{i+1}(s_t) - v_i(s_t)|| < \epsilon$$

kde ϵ je malé číslo.