

TEORIE EKONOMICKÉHO RŮSTU

S využitím materiálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

1 Solowův model

Povinná literatura: BSiM:Ch. 1, Jones (2000)

Klasika: Solow (1956), Swan (1956)

1.1 Model

1.1.1 Předpoklady

- Agregátní produkční funkce

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

- Základní myšlenka: růst výstupu (Y) je možný pouze při růstu vstupů (K, L)
- Práce: $\dot{L}/L = n$ (exogenní)
- Práce je homogenní. (Žádný lidský kapitál)
- K je vyráběn stejnou technologií jako Y
- K je tzv. reprodukovatelný vstup
- Jednosektorová produkce homogenního statků, který může být
 - spotřebován, $C(t)$
 - nebo investován, $I(t)$, za účelem vytvoření dalšího kapitálu $K(t)$
- Uzavřená ekonomika. Úspory se rovnají investicím
- Růst K z investic (úspor):

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \tag{1}$$

kde δ označuje míru depreciační kapitálové zásoby.

- Ekonomika Robinsona Crusoe (Firmy/domácnosti a tržní struktura je 'za scénou', budeme se tím zabývat později)
- Exogenní míra růstu, s : $S(t) = sY(t)$
- Žádné chování

1.1.2 Neoklasická produkční funkce

- Produkční funkce splňuje následující předpoklady (the time notation is suppressed):

1. Kladný a klesající mezní produkt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &> 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} &< 0 \\ \frac{\partial F}{\partial L} &> 0 & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} &< 0 \end{aligned}$$

2. Konstantní výnosy z rozsahu (Constant returns to scale, CRS)

$$F(cK, cL) = cF(K, L), \quad \text{for all } c \geq 0$$

3. Inadovy podmínky:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} F_K &= \lim_{L \rightarrow 0} F_L = \infty \\ \lim_{K \rightarrow \infty} F_K &= \lim_{L \rightarrow \infty} F_L = 0 \end{aligned}$$

$$\text{kde } F_K = \frac{\partial F}{\partial K} \text{ a } F_L = \frac{\partial F}{\partial L}$$

- CRS implikují, že produkční funkce může být zapsána v intenzivní podobě

$$Y = F(K, L) = LF(K/L, 1) = Lf(k) \Rightarrow y = f(k)$$

kde $y \equiv Y/L$, $k \equiv K/L$ a funkce $f(k) \equiv F(k, 1)$

- $y = f(k)$. Pouze kapitálová intenzita k je důležitá pro ekonomickou úroveň (tj. y).
CRS \approx neutralita vzhledem k rozsahu

- **Exercise 1:** Show that

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= f'(k) \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= f(k) - kf'(k) \end{aligned}$$

and that the Inada conditions translates into:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) &= \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) &= 0 \end{aligned}$$

- **Exercise 2** (Harder): Show that the conditions above implies that each factor is **essential** to production, that is $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ for all K, L
- **Exercise 3**: Show that a Cobb-Douglas production function $Y = BK^\alpha L^{1-\alpha}$ satisfies these neoclassical properties.
- **Exercise 4**: Does the following production functions satisfy the neoclassical properties?

$$Y = AK \quad (2)$$

$$Y = AK + BK^\alpha L^{1-\alpha} \quad (3)$$

$$Y = A \{a(bK)^\psi + (1-a)((1-b)L)^\psi\}^{1/\psi} \quad (4)$$

1.1.3 Řešení modelu

- Dosazením za fixní míru úspor dostaneme

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K \quad (5)$$

- Derivací kapitálové intenzity k dle času a dosazením z (6) dostaneme

$$\dot{k} = \dot{K}/L - nk = sy - (n + \delta)k \quad (6)$$

kde populace roste konstantním tempem $\dot{L}/L = n$.

- Model je charakterizován jednou dynamickou rovnicí pro k (základní rovnice modelu)

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k \quad (7)$$

- Základní rovnice se nezmění, když do modelu zahrneme dokonale konkurenční trhy. Spotřebitelé vlastní vstupy a finanční aktiva a dodávají neelasticky vstupy. Firmy vstupy najímají, vyrábějí a prodávají výstup.

- Fungování modelu můžeme popsat pomocí fázového diagramu

- Systém konverguje ke stavu, kde se kapitál na hlavu nemění $\dot{k} = 0$. Ten se nazývá *steady-state* neboli *ustálený stav*.
- Steady statová hodnota k^* je určena:

$$sf(k^*) = (n + \delta)k^*$$

což nám dává konstantní úroveň produkce na pracovníka

$$y^* = f(k^*)$$

- V dlouhém období (když ekonomika zkonverguje do steady statu), nedochází k žádnému *růstu výstupu na hlavu*.
- Tento model *nedokáže vysvětlit trvalý růst výstupu na hlavu*.
- V ustáleném stavu Y, K a L rostou stejným tempem n . Tím pádem jsme na vyvážené růstové trajektorii (Balanced Growth Path, BGP).
- Hlavní mechanismus, který zajišťuje konvergenci do steady statu je klesající mezní produkt z akumulovaného vstupu (tj. kapitálu).

- Role míry úspor: Růst míry úspor zvyšuje *úroveň* výstupu na hlavu nikoliv růst v dlouhém období.
- Jelikož míra úspor je omezena zhora 1, neustálé zvyšování míry úspor neumožní zvýšení růstu trvale.
- Hospodářská politika neovlivní růst v dlouhém období.

- **Zlaté pravidlo kapitálové akumulace** Pro spotřebu ve stálém stavu platí

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^* \quad (8)$$

- Spotřeba je maximální pokud platí

$$f'(k_{gr}^*) = (n + \delta)$$

Mezní produkt kapitálu se rovná míře depreciae a populačního růstu.

- Dynamicky efektivní ekonomika (nalevo od k_{gr}^*), dynamicky neefektivní ekonomika (napravo od k_{gr}^*) (viz BSiM 1.2.5)

1.1.4 Přechodná dynamika

- Je dobré si ilustrovat dynamiku (k, γ_k) diagramu, kde můžeme na vertikální ose odečíst tempo růstu $\gamma_k = \dot{k}/k$.
- Vykreslíme transformovanou verzi rovnice (7).

$$\dot{k}/k = sf(k)/k - (n + \delta)$$

kde $f(k)/k$ je průměrný produkt kapitálu, který klesá s k (Proč?)

- Ten to obrázek ilustruje velmi důležitou implikaci modelu: Pokud mají dvě země stejný steady state, potom chudší země poroste rychleji.

1.1.5 Technologický pokrok

- Do modelu můžeme zavést exogenní technologický pokrok. Jelikož je pokrok nevysvětlený v rámci modelu, moc nového o zdrojích růstu se nedozvíme. Ale toto cvičení je užitečné, protože
 - (i) můžeme provést růstové účetnictví
 - (ii) můžeme vidět, jak technologický pokrok ovlivní dynamiku
- Můžeme přepsat produkční funkci

$$Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))$$

kde $T(t)$ je parametr zachycující technologický pokrok. $T(t)$ roste konstantním tempem $\gamma_T = \dot{T}/T = x$.

- Můžeme rozlišit tři případy zapojení technologického pokroku:
 1. Neutrální (Hicks neutral): $Y = TF(K, L)$,
kde poměr $\frac{\partial Y}{\partial K} / \frac{\partial Y}{\partial L}$ zůstane konstantní pro danou hodnotu $k = K/L$.
 2. Zlepšující práci (Labor-augmenting, Harrod neutral): $Y = F(K, TL)$,
kde poměr $K \frac{\partial Y}{\partial K} / L \frac{\partial Y}{\partial L}$ zůstane konstantní pro danou hodnotu Y/K .
 3. Zlepšující kapitál (Capital-augmenting, Solow neutral): $Y = F(TK, L)$,
kde poměr $K \frac{\partial Y}{\partial K} / L \frac{\partial Y}{\partial L}$ will remain constant for a given value of the ratio Y/L .

- **Exercise:** Show these properties, and draw the isoquants for different values of T . (Note that BSiM are sloppy with their notation on pp. 52-53, their F_K and F_L should be replaced by $\frac{\partial Y}{\partial K}$ and $\frac{\partial Y}{\partial L}$ respectively.)
- V datech pozorujeme, že relativní podíly vstupů ($K \frac{\partial Y}{\partial K} / L \frac{\partial Y}{\partial L}$) nevykazují v čase tren (i když krátkodobě poněkud fluktuují). Rovněž pozorujeme, že podíl Y/K je poměrně stabilní.
- Dá se ukázat, že technologický pokrok musí být *zlepšující práci*, aby model vykazoval BGP.
- Určité vyspělé země vykazují stálý růst, což naznačuje chování podle BGP.
- Next, more recent research suggests (theoretically) that profit-maximizing firms will in the long run choose to conduct a type of research that leads to labor augmenting technical change. (Acemoglu, 2004).
- Z těchto důvodů je technologický pokrok modelován jako zlepšující práci, tj.

$$Y(t) = F(K(t), T(t)L(t)) \quad (9)$$

- Místo vydělení všech veličin množstvím práce L , vydělíme veličiny množstvím práce v efektivních jednotkách, TL . Zdefinujme si $\hat{k} \equiv K/TL$ jako kapitál na efektivnostního pracovníka, podobně pro výstup $\hat{y} \equiv Y/TL$.
- Model je strukturálně stejný jako dříve, jediná změna je, že proměnná n je nahrazena součtem $n + x$ (Proč?)

- Opět dosáhneme steady statu \hat{k}^* jako dříve a tím pádem steady statové úrovně výstupu na efektivnostního pracovníka \hat{y}^* . Na vyvážené růstové trajektorii platí

$$\gamma_{\hat{y}} = \gamma_{Y/TL} = 0$$

$$\gamma_{Y/L} = \gamma_T = x$$

i.e. GDP na hlavu roste tempem technologické změny (x).

- To implikuje:
 1. Dlouhodobý růst HDP na hlavu není možný bez technologického pokroku
 2. Růst HDP na hlavu v dlouhém období je díky nevysvětlenému technologickému pokroku

Tato tvrzení jsou symetrická a v podstatě shodná, ale to první vystihuje lépe podstatu věci.

1.2 Alternativní produkční funkce: Trvalý/endogenní růst, pasti chudoby

- Víme, že klesající mezní produkt kapitálu je podstatný pro závěry Solowova modelu
- Uvažujme jinou produkční funkci

$$Y = AK.$$

kde A je konstantní parametr a opět předpokládáme neexistenci technologického pokroku.

- Průměrný produkt je konstantní

$$f(k)/k = A$$

- Pokud je $sA > n + \delta$ potom dostaneme $\gamma_k = sA - (n + \delta) > 0$ a konstantní.
- Graficky:

- S AK produkční funkcí dostaneme
 1. Trvalý růst z akumulace výrobních faktorů
 2. Neexistenci konvergence
- Později budeme zkoumat modely, které se chovají přesně jako AK model.
- Všimněte si, že trvalý růst dostaneme i s jinou produkční funkcí, např.

$$Y = AK + BK^\alpha L^{1-\alpha}$$

$$Y = A \{a(bK)^\psi + (1-a)((1-b)L)^\psi\}^{1/\psi}$$

- Tyto funkce splňují podmínku klesajícího mezního produktu kapitálu, ale nesplňují horní Inadovu podmínku. Tím pádem průměrný produkt kapitálu nekonverguje asymptoticky k 0 a my můžeme dostat trvalý růst.
- Opět graficky:

- Porušení horní Inadovy podmínky znamená, že nereprodukovatelný výrobní faktor (zde je to práce) je *nepodstatný* pro výrobu, tj. můžeme něco vyrobit i bez tohoto VF.
- Zajímavá skupina modelů je ta s pastmi chudoby. Tyto modely mají složitější dynamiku $f(k)/k$ a může tak vzniknout více rovnováh (multiple equilibria). (BSiM 1.4.2 gives an example that you should study.) Graficky znázorněno:

Reference

- [1] **Lucas, Robert E. Jr.**, On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics*, July 1988, 22 (1), 3-42.
- [2] **Solow, Robert M.**, A Contribution to the Theory of Economic Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, February 1956, 70 (1), 65-94.
- [3] **Swan, Trevor W.**, Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record*, November 1956, 32, 334-361.