Teorie ekonomického růstu

S využitím mateirálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

4 Solowův model a růstová ekonometrie

Základní literatura: Mankiw (1995), Mankiw, Romer and Weil (1992) (sections: I, II.A, III.A), BSiM: 1.2.10-1.2.11, 10.1-10.2,10.5

4.1 Predikce a výsledky Solowova modelu

4.1.1 Kvalitativní predikce

- Míra úspor a populační růst:
  - Ovlivní růst HDP na hlavu v krátkém nikoliv v dlouhém období
  - Ovlivní steady statovou *úroveň* y^*.
- Podmíněná konvergence
- Pouze růst technologie ovlivní růst HDP na hlavu v dlouhém období
- Hospodářská politika je neúčinná vzhledem k růstu v dlouhém období

4.1.2 Speciální případ: Cobb-Douglasova produkční funkce

- Když pracujeme s kvantitativními předpověďmi v Solowově modelu, je velmi výhodné (a běžné) používat speciální případ: Cobb-Douglasovu produkční funkci.
- S CD produkční funkcí je snadné najít steady statovou hodnotu y^* ($y = Y/L$) (Make sure you are able to do this)

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = T(t)\left(\frac{s}{n+x+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{1}$$

  nebo v logaritmech

$$\ln(Y(t)/L(t))^* = \ln(T(0)) + xt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+x+\delta) \tag{2}$$

- Tato rovnice je vhodná pro ekonometrické testování (Proč jsou některé země chudé a jiné bohaté?)

- Mimo steady state je model charakterizován jednou diferenční rovnicí (7) z LN 2. S obecnou produkční funkcí se tato rovnice nedá explicitně vyřešit. Pokud však pracujeme s CD produkční funkcí, je řešení pomocí transformace poměrně snadné. Po zpětné transformaci dostanme explicitní řešení pro vývoj $k(t)$ a tím pádem $y(t)$. (Detaily viz. Jones (2000) a BSiM str. 44-45).

- Řešení nám poskytuje další náhled na dynamiku modelu. Navíc poskytuje kvantitativní předpovědi při testování na datech.

- Řešení je

$$y(t) \equiv Y(t)/L(t) = \left(\frac{s}{n+x+\delta}(1-e^{-\beta t}) + \left(\frac{Y(0)}{L(0)A(0)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\beta t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T(t) \tag{3}$$

- Klíčový parametr $\beta \equiv (1-\alpha)(n+x+\delta)$ určuje míru, jakou ekonomika konverguje k BGP (do steady statu).

4.1.3 Kvantitativní predikce

Rozdíly v míře úspor a populačním růstu

Mějme dvě země A a B které jsou totožné kromě rozdílů v míře úspor s_A a s_B a populačním růstu n_A a n_B.

Použitím (1), můžeme nalézt predikovaný vztah mezi steady statovými hodnotami HDP na hlavu, y_A^* a y_B^*

$$\frac{y_A^*}{y_B^*} = \left(\frac{s_A}{s_B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{n_B+x+\delta}{n_A+x+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{4}$$

Tento vztah můžeme vidět i přímo z rovnice (4.3.2) po zderivování

$$dy^*/y^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)})[ds/s - d(n+x+\delta)/(n+x+\delta)]$$

Jednoprocentní zvýšení míry růstu (snížení populačního růstu), zvýší steady statovou úroveň důchodu na hlavu o $\alpha/(1-\alpha)$ procent.

Rychlost konvergence

Z rovnice (3) víme, že parametr $\beta = (1-\alpha)(n+x+\delta)$ určuje jak rychle se $y(t)$ přibližuje steady statové úrovni y^*.

Parametr β se nazývá *rychlost konvergence*. (Podrobněji se jím budeme zabývat později.)

Všimněte si, že míra úspor neovlivňuje rychlost konvergence. Také vidíme, že opět stejné parametry jsou podstatné pro toto kvantitativní měřítko.

Rozdíly v míře návratnosti kapitálu

Mezní produkt kapitálu

$$R = f'(k)$$

nebo

$$R = \alpha k^{-(1-\alpha)} = \alpha y^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

pro CD případ. Mějme opět země A a B s HDP na hlavu y_A a y_B. Model předpovídá, že vztah pro míry návratnosti kapitálu v těchto dvou zemích je

$$\frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{y_A}{y_B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{5}$$

Parametr α je opět klíčový.

S obecnou produkční funkcí musíme tento výraz nahradit

$$\frac{dR}{R} = -\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}\frac{dy}{y}$$

kde σ je elasticita substituce mezi kapitálem a prací. V CD příadě je tato elasticita konstantní a rovna 1. Nižší elasticita tak bude predikovat nižší rozdíly v návratnosti pro dané rozdíly v HDP na hlavu.

4.2 Základní model a stylizovaná fakta

- Podíváme se, jak základní Solowův model vysvětluje hlavní empirická fakta: jak se liší důchod a ekonomický růst mezi zeměmi. Předpokládáme stejnou produkční funkci pro všechny země.

- Parametr α hraje hlavní roli v rovnicích, které jsme odvodili výše. Připomeňme, že

$$\alpha = \frac{f'(k)k}{y} = \frac{F_K K}{Y} = \frac{RK}{Y} = \text{Capital's share of income}$$

- Je empirický fakt, že kapitálový podíl (capital's share of income) je přibližně 1/3. Použijeme odhad $\alpha = 1/3$ ke kalibraci rovnic a dostaneme kvantitativní měřítko velikosti vlivů.

- Většinu rovnic jsme odvodili pro speciální případ C-D produkční funkci. Ty platí (aspoň jako aproximace) i pro obecnou produkční funkci. Vyjímkou je vztah mezi y a R, kde se objevuje elasticita substituce mezi kapitálem a prací.

4.2.1 Velikost rozdílů v důchodech

- $\alpha = 1/3$ znamená, že čtyřikrát větší úspory implikují pouze dvakrát větší úroveň důchodu na hlavu. My bychom ale potřebovali model, který je schopen vysvětlit rozdíly v důchodech (alespoň) desetinásobné. Takové hodnoty s a n potřebené k vysvětlení těchto rozdílů v datech nenajdeme.

- $\alpha/(1-\alpha)$ musí být vyšší $\Rightarrow$ potřebujeme vyšší α!

- Alternativně: Výsledky v Mankiw, Romer and Weil (1992), section I, ukazují, že odhadnuté koeficienty u úspor a populačního růstu jsou příliš velké a nekorespondují s modelem. Kromě toho ekonometrický model moc nevysvětluje data (malé R^2).

4.2.2 Míra konvergence

- S $\alpha = 1/3$, a hodnotami n je 1 procento, x 2 procenta a δ 3 procenta (ročně), dostaneme tempo konvergence $\beta = 4$ procent.

- Pozorované tempo konvergence je přibližně 2 procenta $\Rightarrow$ potřebujeme vyšší α!

4.2.3 Míra návratnosti (rate of return)

- S $\alpha = 1/3$, chudá země, kde je důchod 1/10 bohaté země by měla být míra návratnosti 100 krát vyšší než v bohaté zemi.

- Tento výsledek se může lišit, pokud $\sigma > 1$, což je celkem přijatelný předpoklad. Viz Mankiw (1995) page 287–288.

- I tak ale nepozorujem v datech nic takového a toky kapitálu z bohatých zemí do chudých jsou malé

- $\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}$ je příliš velký $\Rightarrow$ potřebujeme vyšší α!

4.3 Rozšířený Solowův model (s lidským kapitálem)

4.3.1 Přehodnocení kapitálu

- Neexistuje pouze fyzický kapitál.
- Úroveň lidského kapitálu podstatně vzrostla.
- Pokud přeformulujeme Solowův model, kde K bude šířeji pojatý kaptiál, dostaneme vyšší α.
- Pokud zahrneme lidský kapitál do K musíme vzít v úvahu, že podstatný podíl mezd je vlastně odměna lidskému kapitálu pracovníků a tím pádem musí být zahrnuta v důchodech jdoucích pro K.
- Zvýšení α je řešení všech tří problémů, kterými se zabývá Mankiw (1995).
- Formálně: Změníme produkční funnkci, aby zahrnovala lidský kapitál

$$Y = K^{\alpha} H^{\eta} (TL)^{(1-\alpha-\eta)} \Rightarrow \hat{y} = \hat{k}^{\alpha} \hat{h}^{\eta} \tag{6}$$

- Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu (CRS) zachováme (součet exponentů je roven 1).
- Předpokládáme $\alpha + \eta < 1$, takže máme (stále) klesající výnosy z akumulovaných výrobních faktorů.
- Spotřební statky, fyzický kapitál a lidský kapitál jsou vyráběny stejnou produkční funkcí, tj. vyrábíme znalosti (dovednosti) stejně jako auta nebo počítače (později se k relevantnosti předpokladu jednosektorové produkční funkce vrátíme).
- Úspory můžeme použít k investicím do fyzického (K) i lidského kapitálu (H).
- Pro jednoduchost předpokládáme, že oba typy kapitálu deprecuují stejnou mírou δ. Základní rovnice Solowova modelu pak bude

$$\dot{\hat{k}} + \dot{\hat{h}} = s\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\eta} - (n + x + \delta) \cdot (\hat{k} + \hat{h})$$

- Rovnost míry návratnosti fyzického i lidského kapitálu požaduje, aby

$$\alpha \frac{\hat{y}}{\hat{k}} - \delta = \eta \frac{\hat{y}}{\hat{h}} - \delta \quad \Rightarrow \quad \hat{h} = \frac{\eta}{\alpha} \hat{k} \tag{7}$$

  což implikuje, že existuje fixní vztah mezi $\hat{k}$ a $\hat{h}$.

- Všimněte si, že tímto předpokladem dostaneme, že K a H se okamžitě přizpůsobí požadovanému poměru. (Přeměníme K do H a naopak). Je to přijatelné?

- Pomocí (7), můžeme přepsat základní rovnici na

$$\dot{\hat{k}} = sA\hat{k}^{\alpha+\eta} - (n + x + \delta)\hat{k}$$

kde $A = \frac{\eta^{\eta}\alpha^{1-\eta}}{\alpha+\eta}$ je konstanta.

- Takže máme tu opět jednoduchou rovnici pro $\hat{k}$ podobně, jak jsme měli v modelu pouze s fyzickým kapitálem. Jediný, ale podstatný rozdíl je, že α is nahrazena $\alpha + \eta$. tj. jako bychom měli větší α v základním (učebnicovém) modelu.

- Všimněte si, že můžeme celý systém charakterizovat jedinou rovnicí pro $\hat{k}$, protože změny v $\hat{h}$ se vždy přizpůsobí změnám v $\hat{k}$ podle (7).

- Proč zahrnutí lidského kapitálu zlepší predikce modelu?

  1. Rozdíly v míře úspor ovlivní, jak moc máme akumulovaného vstupu. Role akumulovaného vstupu je nyní větší (máme jak fyzický kapitál (elasticita α), tak i lidský kapitál (elasticita η)), a tím pádem dostaneme větší rozdíly v y.
  2. Konvergence je pomalejší. Intuitivně: existuje větší setrvačnost, protože máme širší základ pro kapitál. Formálně: klesající výnosy se dostavují pomaleji; produkční funkce je méně konkávní v akumulovaných vstupech ($\alpha + \eta > \alpha$), takže se dostáváme do steady-statu pomaleji.
  3. Pro dané rozdíly v y dostaneme menší rozdíly v míře návratnosti, protože mezní produkt akumulovaného výrobního faktoru klesá pomaleji.

4.3.2 Alternativní formulace, Mankiw-Romer-Weil

- Ve výše uvedené formulaci jsme předpokládali, že produkce se rozdělovala prostřednictvím investic mezi dva typy kapitálu tak, že jejich míry návratnosti se rovnaly.

- V dlouhém období je rovnost míry návratnosti opodstatněná. Ale možnost substituovat obě formy kapitálu H a K není vždy přijatelná.

- Z tohoto důvodu se podíváme na alternativní formulaci. Ta je důležitá také proto, že je použita ve významném článku Mankiw, Romer a Weil (1992), dále označováno MRW.
- Nyní předpokládáme, že je exogenní a fixní část důchodu s_k investována do fyzického kapitálu a podíl s_h je investován do lidského kapitálu.

  Tedy:

$$\dot{\hat{k}} = s_k \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (n + x + \delta)\hat{k} \tag{8}$$

$$\dot{\hat{h}} = s_h \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (n + x + \delta)\hat{h} \tag{9}$$

- Tento systém je v zásadě stejný jako předtím, akorát nyní máme dvě dynamické rovnice a řešení je poněkud komplikovanější. Problémem je, zda existuje steady state a zda k němu systém konverguje.
- Uvažujme diagram v $(\hat{k}, \hat{h})$ prostoru. Nakreslete křivky charakterizující hodnoty $\hat{k}$ a $\hat{h}$ pro které $\dot{\hat{k}} = 0$, a podobně pro případ, kdy $\dot{\hat{h}} = 0$. Ukažte, že skončíte v (jediném) bodě, kde se tyto dvě křivky protnou, tj. v steady statu.

- Steady state ($\dot{\hat{k}} = \dot{\hat{h}} = 0$) je dán:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s_k^{1-\eta} s_h^\eta}{n + x + \delta} \right)^{1/(1-\alpha-\eta)} \tag{10}$$

$$\hat{h}^* = \left(\frac{s_k^{\alpha} s_h^{1-\alpha}}{n + x + \delta} \right)^{1/(1-\alpha-\eta)} \qquad (11)$$

- Dosazením zpět do produkční funkce dostaneme rovnici pro důchod na hlavu ve steady statu jako:

$$\ln((Y(t)/L(t))^*) = \ln(T(t)) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\eta} \ln(s_k) + \frac{\eta}{1-\alpha-\eta} \ln(s_h) - \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha-\eta} \ln(n+x+\delta) \qquad (12)$$

  což je obdoba rovnice pro model bez lidského kapitálu

- Tato log-lineární formulace je velmi výhodná pro empirickou práce, protože může být použita pro ekonometrický odhad (linerání regresní model).

Reference

[1] **Jones, Charles I,** A Note on the Closed Form Solution of the Solow Model, 2000. http://elsa.berkeley.edu/users/chad/closedform.pdf.

[2] **Mankiw, N. Gregory**, The Growth of Nations, *Brookings Papers on Economic Activity,* 1995, 275-310.

[3] **Mankiw, N. Gregory, Romed David and Weil, N. David**, A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics,* May 1992, 107 (2), 407-437.