Věk	Pravděpodobnost úmrtí	Pravděpodobnost dožití	Počet dožívajících	Počet zemřelých	Počet žijících	Pomocný ukazatel	Střední délka života
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e^0_x
0.. ω	$q_x = 1 - e^{-m_x}$ $m_x = \frac{D_x}{S_x}$,	$p_x = 1 - q_x$	$l_{x+1} = p_x . l_x$	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$L_x = ½.(l_x + l_{x+1})$ $L_x = l_{x+1} + ½\ d_x$	$T_x = \sum_{i=x}^{\omega} L_i$	$\frac{T_x}{l_x}$

Význam jednotlivých veličin uvedených v úmrtnostní tabulce:

q_x … vyjadřují pravděpodobnost, že právě x-letá osoba zemře před dosažením věku $x + 1$

m_x … dosazuje tzv. specifická míra úmrtnosti získaná z empirických dat

D_x … je pozorovaný počet osob daného pohlaví zemřelých ve věkové třídě x (tj. po dožití se x let a před dovršením $x + 1$ let)

S_x … je střední stav osob daného pohlaví ve věkové třídě x podle sčítání lidu

p_x … vyjadřuje pravděpodobnost, že osoba ve věku x let se dožije věku $x + 1$;

l_x … je hypotetický počet osob, které se dožijí věku x let ze 100 000 narozených osob (tzv. kořen tabulky - l_0) při odhadnuté úmrtnosti v jednotlivých obdobích;

ω … zvolená horní věková hranice; tedy předpokládáme, že poslední z onoho výchozího počtu 100 000 osob zemře před dosažením věku $\omega + 1$ let (ČSÚ volí $\omega = 103$);

d_x … udává počet zemřelých osob ve věkové třídě x;

L_x … je průměrný počet žijících ve věku x let ($L_0 = l_0(1 - 0{,}92q_0)$, protože se většinou jedná o kojenecká úmrtí, a tak se musí k výpočtu L_0 použít statistik kojenecké úmrtnosti);

T_x … vyjadřuje počet let života, které má celá tabulková generace v daném věku x ještě před sebou;

e^0_x … udává počet let, který má naději prožít osoba právě x-letá ve sledovaném období.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}, \qquad p_x = 1 - q_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

$_np_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba dožije věku $x + n$,

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

$_nq_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba nedožije věku $x + n$,

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x};$$

$_{m|n}q_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba dožije věku $x + m$, ale zemře v průběhu následujících n let,

$${}_{m|n} q_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x},$$

$_{m|}q_x$ … pravděpodobnost, že x-letá osoba zemře ve věku $x + m$,

$${}_{m|} q_x = {}_m p_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} = \frac{d_{x+m}}{l_x}.$$

KOMUTAČNÍ ČÍSLA

komutační čísla nultého řádu:

diskontovaný počet dožívajících se věku x: $D_x = l_x \cdot v^x$;

diskontovaný počet zemřelých ve věkové třídě x: $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$;

komutační čísla prvního řádu:

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega, \qquad M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega.$$

komutační čísla druhého řádu:

$$R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j} \qquad S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}$$

diskontní faktor

$$v = \frac{1}{1+i}$$

JEDNOTKOVÉ NETTO POJISTNÉ

– pojistné pro 1 Kč částky pojistného plnění, bez nákladů pojišťovny,

$$\pi\ (zaplacené\ pojistné) = jednotkové\ pojistné * Pojistná\ částka\ (plnění)$$

JEDNORÁZOVĚ PLACENÉ NETTO POJISTNÉ

Pojištění na dožití

$${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Pojištění pro případ smrti

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \frac{d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti

$$A^1_{x:n\rceil} = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Doživotní pojištění pro případ smrti odložené o t let

$${}^{a}_{t|}A_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{1+t} + \frac{d_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{2+t} + \ldots = \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + d_{x+t+1} \cdot v^{x+t+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_{x+t}}{D_x}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t let

$${}_{t|}A^1_{x:n\rceil} = \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \ldots + \frac{d_{x+t+n-1}}{l_x} \cdot v^{t+n} = \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + \ldots + d_{x+t+n-1} \cdot v^{x+t+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_{x+t} + \ldots + C_{x+t+n-1}}{D_x} = \frac{M_{x+t} - M_{x+t+n}}{D_x}$$

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

$$(LA)_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + 2 \cdot C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x + M_{x+2} + \ldots}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}$$

Smíšené pojištění

$$A_{x:n\rceil} = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} + l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Speciální smíšené pojištění s různými pojistnými částkami pro dožití a smrt

$$\pi(A_{x:n\rceil}) = A^1_{x:n\rceil} \cdot PČ_{úmrtí} + {}_nE_x \cdot PČ_{dožití} = \frac{(M_x - M_{x+n}) \cdot PČ_{úmrtí} + D_{x+n} \cdot PČ_{dožití}}{D_x}$$

DŮCHODOVÉ NETTO POJISTNÉ (předlhůtní $ä_x$, polhůtní a_x)

Doživotní důchod

$$ä_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \qquad a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad vztah{:}\ a_x = ä_x - 1$$

Dočasný důchod

$$ä_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad a_{x:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Odložený doživotní důchod

$${}_{t|}ä_x = \sum_{k=t}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} \ldots + D_\omega}{D_x} = \frac{N_{x+t}}{D_x} \qquad {}_{t|}a_x = \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

Odložený dočasný důchod

$${}_{t|}ä_x = \sum_{k=t}^{t+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \ldots + D_{x+t+n-1}}{D_x} = \frac{N_{x+t} - N_{x+t+n}}{D_x} \qquad {}_{t|}a_x = \frac{N_{x+t+1} - N_{x+t+n+1}}{D_x}$$

Předlhůtní doživotní důchod zaručený na n let

$${}_{t|}ä_{n\rceil i} = v^t \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \qquad odložený\ o\ t\ let, zaručený\ na\ n\ let$$

$$ä_{\overline{x:\overline{n}\rceil}} = ä_{n\rceil i} + {}_{n|}ä_x = \frac{1 - v^n}{1 - v} + \frac{N_{x+n}}{D_x},$$

Doživotní důchod rostoucí lineárně

$$(lä)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} (k+1) \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \ldots + (\omega - x + 1) \cdot D_\omega}{D_x} = \frac{S_x}{D_x}$$

PODROČNÍ DŮCHODOVÉ NETTO POJISTNÉ

- Je možné využít **Woolhouseův vzorec** pro diferencovatelnou funkci u_t:

$$u_0 + u_{\frac{1}{m}} + \dots + u_{\frac{km}{m}} \approx m \cdot (u_0 + u_1 + \dots + u_k) - \frac{m-1}{2} \cdot (u_0 + u_k) - \frac{m^2-1}{12} \cdot (u_k' - u_0') - \frac{m^4-1}{720} \cdot (u_k''' - u_0''').$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot v^{\frac{k}{m}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^k - \frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} {}_0 p_x + 0\right) = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

področní doživotní důchod

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}, \qquad a_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m},$$

področní odložený doživotní důchod

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+n}}{D_x}, \qquad {}_{n|}a_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+n}}{D_x},$$

področní dočasný důchod

$$\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)} \doteq \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right), \qquad a_{x:n\rceil}^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right).$$

BĚŽNÉ NETTO POJISTNÉ – placené ročně

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\ddot{\mathrm{a}}_{\boldsymbol{x:m}\rceil}}$$

PODROČNÍ BĚŽNÉ NETTO POJISTNÉ – placené m-krát ročně

Běžné pojistné doživotně placené

$$P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{\mathrm{a}}_x^{(m)}}$$

Pojistné dočasně placené

$$P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{\mathrm{a}}_{x:n\rceil}^{(m)}}$$

Pojištění s pevnou dobou výplaty

$$P_x = \frac{\pi_x}{\ddot{\mathrm{a}}_{x:n\rceil}} = \frac{v^n \cdot D_x}{N_x - N_{x+n}} \qquad \pi_x = v^n$$

področní dočasný důchod

$${}_n\Pi_x^{(m)} = \frac{{}_nE_x}{m \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{D_{x+n}}{m\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]},$$

pojištění pro případ smrti:

$$\Pi_x^{(m)} = \frac{A_x}{m\ddot{a}_x^{(m)}} \doteq \frac{M_x}{m\left(N_x - \frac{m-1}{2m}D_x\right)};$$

dočasné pojištění pro případ smrti:

$$\Pi_{x:n\rceil}^{1\,(m)} = \frac{A_{x:n\rceil}^1}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{M_x - M_{x+n}}{m\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]};$$

smíšené pojištění:

$$\Pi_{x:n\rceil}^{(m)} = \frac{A_{x:n\rceil}}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{m\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]};$$

pojištění odloženého doživotního důchodu (běžné pojistné se platí během doby odkladu n):

$${}_{n|}\pi_x^{(m)} = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)}}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{m\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]}.$$

***** pojistné plnění je vypláceno m1-krát ročně a pojistné se platí m2-krát ročně a m1 se nerovná m2.**

$${}_{n|}\pi_x^{(m_{1,2})} = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x^{(m_1)}}{m_2\,\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m_2)}} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m_1-1}{2m_1}D_{x+n}}{m_2\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m_2-1}{2m_2}(D_x - D_{x+n})\right]}.$$

***** poplatník platí n1 let, pojišťovna platí po n2 let (n1<n2)**

$$f * m * \frac{N_{x+n2} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n2}}{m\left[N_x - N_{x+n1} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n1})\right]}.$$

BRUTTO POJISTNÉ jednotkové - pro 1 korunu pojistné částky; **Б** - jednorázové pojistné; **B** - běžné pojistné

Náklady pojišťovny:

počáteční jednorázové náklady α … spojené s uzavíráním pojistné smlouvy, zakalkulují se jednorázově při uzavření pojistné smlouvy jako procento (%) z pojistné částky (ročního důchodu);

jednorázové placení: $\pi + \alpha$

běžné placení po dobu m let: $P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:m\rceil}}$

běžné správní náklady β … náklady související s provozem pojišťovny (každoroční během trvání pojištění spojené s jeho udržováním), tyto náklady se počítají v promilích (‰) z pojistné částky (ročního důchodu); dělí se na 2 složky, pokud doba placení pojistného je kratší než doba trvání pojištění:

β_1 – běžné správní náklady potřebné každoročně po celou dobu trvání pojištění

β_2 – běžné správní náklady potřebné každoročně jen po dobu placení pojistného

přičemž **β = β1 + β2**

jednorázové placení ($\beta_1 = \beta$): dočasné pojištění $\pi + \beta \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$

trvalé pojištění $\pi + \beta \cdot \ddot{a}_x$

běžné placení: pokud m = n $P + \beta$

pokud m < n $P + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x:n\rceil}}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} + \beta_2$

inkasní náklady γ … náklady s pojené s inkasem běžného pojistného a jsou započítány jako % z ročního brutto pojistného

při běžném placení: $P + \gamma \cdot B$

náklady při výplatě důchodů δ … týkají se pouze důchodového pojištění, náklad spojený s jeho pravidelným vyplácením, většinou se počítají jako % z ročního důchodu.

Jednorázové pojistné

doživotní pojištění

$$Б = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x$$

dočasné pojištění

$$Б = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}$$

Běžné pojistné m = n

doživotní

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta\right)$$

dočasné

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:n\rceil}} + \beta\right)$$

Běžné pojistné m < n

doživotní

$$_{|m}B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} + \beta_2\right)$$

dočasné

$$_{|m}B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x:n\rceil}}{\ddot{a}_{x:m\rceil}} + \beta_2\right)$$

Běžné področní pojistné – pojišťovny mohou používat analogické vzorce jako u netto pojištění

doživotní

$$B^{(m)} \approx \frac{B}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x}{N_x}}$$

dočasné

$$B^{(m)} \approx \frac{B}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x - D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}$$

Pojištění na dožití s výhradou vrácení pojistného v případě smrti pojištěného

$$B_{x:n\rceil} = \frac{{}_nE_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}}{(1-\gamma) \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil} - (IA)^1_{x:n\rceil}}$$

$$(IA)^1_{x:n\rceil} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

Pojištění odloženého doživotního důchodu na k let s výhradou vrácení pojistného při úmrtí pojištěného během odkladu

$$B_{x:n\rceil} = \frac{(1+\delta) \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:k\rceil}}{(1-\gamma) \cdot \ddot{a}_{x:k\rceil} - (IA)^1_{x:k\rceil}}$$

smíšené pojištění jednorázové

$$JB_{x:n\rceil} = A_{x:n\rceil} + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil} =$$

$$JB_{x:n\rceil} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta_1(N_x - N_{x+n})}{D_x} + \alpha$$

smíšené pojištění běžné

$$B_{x:n\rceil} \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil} = A_{x:n\rceil} + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:n\rceil} + \gamma B_{x:n\rceil} \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil} =$$

$$B_{x:n\rceil} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta(N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{(1-\gamma)(N_x - N_{x+n})}.$$

smíšené pojištění běžné področní

$$B^{(m)}_{x:n\rceil} \doteq \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta(N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{m(1-\gamma)\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]}.$$

Pojištění odloženého doživotního důchodu (běžné pojistné se platí během doby odkladu n a běžné pojistné i pojistné plnění je uskutečňováno m-krát do roka)

$$_{n|}JB^{(m)}_x = (1+\delta)\,{}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x \doteq \frac{(1+\delta)\left(N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}\right) + \beta_1 \cdot N_x}{D_x} + \alpha$$

$$_{n|}B^{(m)}_x = \frac{(1+\delta)\,{}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x + \beta_2 \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}}{(1-\gamma)m\ddot{a}^{(m)}_{x:n\rceil}} \doteq \frac{(1+\delta)\left(N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}\right) + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2(N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{m(1-\gamma)\left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})\right]},$$

odvozený vzorec pro poj. odloženého ročního doživotního důchodu o n1 let placeného běžným pojistným po dobu n2 let (n2 ≤ n1)

$$_{n|}B^{(m)}_x \doteq \frac{(1+\delta)N_{x+n1} + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2.(N_x - N_{x+n2}) + \alpha.D_x}{(1-\chi).(N_x - N_{x+n2})}$$

$$_{n|}B^{(m)}_x \doteq \frac{(1+\delta)(N_{x+n1} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n1}) + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2.(N_x - N_{x+n2}) + \alpha.D_x}{m(1-\chi).(N_x - N_{x+n2} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n2}))}$$

Lékařský underwriting – multiplikativní m_m a aditivní m_a nadúmrtnost

$$q_x^z = \left(1+\frac{m_m}{100}\right)\cdot q_x + \frac{m_a}{1000}$$

Zdravotní aspekty

100% DD akcelerace

$$q_x^{acc} = i_x + (1-k_x)\cdot q_x$$

q acc x – pravděpodobnost jedince, který je naživu ve věku x a neměl DD diagnózu ve věku x a dříve, je DD diagnostikován před dosažením věku x+1
i_x – pravděpodobnost jedince, který je naživu ve věku x a neměl DD diagnózu ve věku x a dříve, je DD diagnostikován před dosažením věku x+1
k_x – poměr DD úmrtí ve věku x vůči všem úmrtím ve věku x

$$P_{x:n\rceil}^{acc} = \frac{A_{x:n\rceil}^{1\,acc}}{\ddot{a}_{x:n\rceil}^{acc}} = \frac{M_x^{acc}-M_{x+n}^{acc}}{N_x^{acc}-N_{x+n}^{acc}}$$

Nezávislé DD pojistné plnění

$$q_x^{ind} = i_x$$

$$jednotková\ počáteční\ hodnota\ pro\ samostatné\ nezávislé\ DD\ krytí \quad A_{x:n\rceil}^{1\,ind} = \frac{M_x^i - M_{x+n}^i}{D_x^{acc}}$$

$$běžné\ roční\ netto\ pojistné \quad P_{x:n\rceil}^{ind} = \frac{A_{x:n\rceil}^{1\,ind}}{\ddot{a}_{x:n\rceil}^{acc}}$$

NETTO REZERVA

Netto rezerva = budoucí výdaje – budoucí příjmy

$${}_tV_x = \frac{\sum_{j=t+1}^{n}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}} - \frac{P_{x:n\rceil}\cdot\sum_{j=t+1}^{n} D_{x+j-1}}{D_{x+t}}$$

pojištění s jednorázovým pojistným – druhý zlomek zmizí

$${}_tV_{x:n\rceil} = \frac{\sum_{j=t+1}^{n}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}$$

retrospektivní výpočet rezerv (minulé příjmy – minulé výdaje) – nepoužívá se

$${}_tV_x = \frac{P_{x:n\rceil}\cdot\sum_{j=1}^{t} D_{x+j-1}}{D_{x+t}} - \frac{\sum_{j=1}^{t}(a_j\cdot D_{x+j} + b_j\cdot C_{x+j-1})}{D_{x+t}}$$

pojištění pro případ dožití (an = 1, aj = 0 a bj=0)

$${}_tV_{x:n\rceil} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:n\rceil}\cdot\ddot{a}_{x+t:n-t\rceil} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} * \frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

pojištění pro případ smrti

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x\cdot\ddot{a}_{x+t} = 1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1-\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_{x+t}}{N_x}$$

dočasné pojištění pro případ smrti

$${}_tV_{x:n\rceil} = A_{x+t:n-t\rceil}^{1} - P_{x:n\rceil}\cdot\ddot{a}_{x+t:n-t\rceil} = \frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

smíšené pojištění

$${}_tV_{x:n\rceil} = A_{x+t:n-t\rceil} - P_{x:n\rceil}\cdot\ddot{a}_{x+t:n-t\rceil} = 1-\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

pojištění s pevnou dobou výplaty

$${}_tV_{x:n\rceil} = v^{n-t} - P_{x:n\rceil}\cdot\ddot{a}_{x+t:n-t\rceil} = v^{n-t} - v^n\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

pojištění odloženého doživotního důchodu

$$
{}_tV_x = \begin{cases} {}_{k-t|}\ddot{a}_{x+t} - P_{x:k\rceil} \cdot \ddot{a}_{x+t:k-t\rceil} = \dfrac{N_{x+k}}{D_{x+t}} \cdot \dfrac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}} & pro\ t < k \\ \ddot{a}_{x+t} = \dfrac{N_{x+t}}{D_{x+t}} & pro\ t \geq k \end{cases}
$$

Ukládací a riziková část pojistného

z netto rezervy – **ukládací část**
z rizikového kapitálu – doplněk netto rezervy do pojistné částky – **riziková část**
Rekurentní vzorec netto rezervy pro pojištění s ročním pojistným lze upravit

$$P_{x:n\rceil} = {}_tV_{x:n\rceil} \cdot \frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}} - {}_{t-1}V_{x:n\rceil} + \frac{a_t \cdot D_{x+t} + b_t \cdot C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = {}_tV_{x:n\rceil} \cdot v - {}_{t-1}V_{x:n\rceil} + \frac{a_t \cdot D_{x+t} + (b_t - {}_tV_{x:n\rceil}) \cdot C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} = P^{ukl}_{x:n\rceil}(t) + P^{riz}_{x:n\rceil}(t)$$

$P^{ukl}_{x:n\rceil}(t) = {}_tV_{x:n\rceil} \cdot v - {}_{t-1}V_{x:n\rceil}$ a $P^{riz}_{x:n\rceil}(t) = \frac{a_t \cdot D_{x+t} + (b_t - {}_tV_{x:n\rceil}) \cdot C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}}$

Zillmerova rezerva

ještě nesplacená část α nákladů odečtena z netto rezervy

$${}_tV_x^Z = {}_tV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:n\rceil}} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t\rceil} \qquad pro\ m > t$$

$${}_tV_x^Z = {}_tV_x \qquad pro\ m \leq t$$

- v počátečních letech může být rezerva záporná, v takovém případě se pokládá rovnou nule
- výpočet zilmerovací sazby α^Z, která je kořenem rovnice ${}_tV_xz = 0$, pak jsou všechny $\alpha < \alpha^Z$

Odkup = zillmerova rezerva – stornosrážka

Technické změny – redukce pojistné částky

$${}_tV_x^Z \cdot P\check{C} = Б_{x+t} \cdot {}_tR_x$$

$${}_tR_x = \frac{{}_tV_x^Z \cdot P\check{C}}{Б_{x+t}}$$

nepočítají se α náklady protože jsou v zillmerově rezervě

DYNAMIZACE (INDEXACE) – metoda dodatečného pojištění

$$B' = B + (P\check{C}' - P\check{C}) \cdot B_{x+t:n-t\rceil}$$

NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ

Statistické ukazatele: $PPP\ (prům.poj.plnění) = \frac{celkové\ pojistné\ plnění}{N\ (počet\ pojištění)}$

$$PP\check{C}\ (prům.poj.částka) = \frac{celková\ pojistná\ částka}{N}$$

$$P\check{S}\ (prům.škoda) = \frac{celkové\ pojistné\ plnění}{n\ (počet\ poj.událostí)}$$

$$\check{S}F\ (škodní\ frekvence) = q_1 = \frac{n}{N}$$

$$PS\ (poj.sazba) = \frac{celkové\ pojistné}{celková\ pojistná\ částka}$$

$$\check{S}S\ (škodní\ sazba) = \frac{celkové\ pojistné\ plnění}{celková\ pojistná\ částka}$$

$$\check{S}P\ (škodní\ průběh) = \frac{celkové\ pojistné\ plnění}{celkové\ pojistné}$$

$$\check{S}St\ (škodní\ stupeň) = q_2 = \frac{P\check{S}}{PP\check{C}}$$

Obecný vzorec netto pojistného

$$N \cdot P \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) = n \cdot P\check{S}$$

$$P = \frac{n \cdot P\check{S}}{N \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{P\check{S}}{PP\check{C}} \cdot PP\check{C} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot PP\check{C} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S$$

$$p\ (roční\ pojistné\ na\ jednotkovou\ částku) = v \cdot q_1 \cdot q_2$$

Obnosové pojištění – závisí pouze na vzniku pojistné události, ne na výši škody

$$P_{(s)} = v \cdot q_1 \cdot S$$

Škodové pojištění – závisí na výši vzniklé škody X, platí poj. plnění ≤ X
Ryzí zájmové pojištění -> poj.plněni = X

$P_{(Z)} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot H$

Pojištění na plnou hodnotu -> poj. částka S ≤ H

$s = \frac{S}{H} \quad kde\ s\ \leq 1 \quad \dots intenzita\ pojistné\ ochrany$

$pojistné\ plnění = s \cdot X$

${}^{S}P_{(H)}^{H} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot s \cdot H = s \cdot P_{(z)}$

Pojištění na první riziko

${}^{S}P_{(P)}^{H} = v \cdot q_1 \cdot [G_s \cdot H + (1 - b_s) \cdot S] = v \cdot q_1 \cdot [G_s + (1 - b_s) \cdot s] \cdot H$

G*H – střední výše pojistného plnění pro škody do stupně s
(1-b)*S – střední výše pojistného plnění pro škody nad škodní stupeň s

Spoluúčast – klient se urč. způsobem podílí na úhradě škody

Podílová spoluúčast + ryzí zájmové pojištění

${}_{p}P_{(Z)} = \frac{100 - p}{100} \cdot P_{(z)}$

Excendentní spoluúčast + pojištění na první riziko (nehradí škodu do hodnoty F_0, nad hodnotu jen převyšující část z F_0)

${}_{F_0}^{S}P_{(P)}^{H} = v \cdot q_1 \cdot \left[G_s + (1 - b_s) \cdot s - G_{f_0} + \left(1 - b_{f_0}\right) \cdot f_0\right] \cdot H \qquad kde \quad f_0 = \frac{F_0}{H}$

Integrální spoluúčast + pojištění na plnou hodnotu (nehradí škodu do hodnoty F_i, pak hradí celou škodu)

${}_{F_i}^{S}P_{(H)}^{H} = v \cdot q_1 \cdot \left(q_2 - G_{f_i}\right) \cdot S \qquad kde \quad f_i = \frac{F_i}{H}$

Brutto pojistné

$brutto\ pojistné = netto\ pojistné + bezpečnostní\ přirážka + správní\ náklady + kalkulovaný\ zisk$

přidání bezpečnostní přirážky -> rizikové pojistné

Riziková přirážka statistické povahy

$RP = (1 + \lambda_1) \cdot P + \lambda_2 \cdot s + \lambda_3 \cdot s^2$

s (s^2) – odhad směrodatné odchylky (rozptylu)

lambda – nezáporné koeficienty

Princip směrodatné odchylky

$RP = P + \lambda \cdot s$

pro každou pojistku máme údaje o výši škody v daném roce vyjádřené jakou zi*S, kde zi je škodní stupeň i-té pojistky

$N \cdot p \cdot S = \sum_{i=1}^{N} z_i \cdot S \qquad na\ levé\ straně - celkové\ netto\ pojistné\ za\ daný\ rok;\ na\ pravé\ straně - celková\ škoda$

$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i \qquad průměr\ škodních\ stupňů$

$s = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (z_i \cdot S - p \cdot S)^2} \qquad odhadnutá\ směrodatná\ odchykla\ výše\ škody\ na\ jednu\ pojistku$

při větších hodnotách nevadí, že ve jmenovateli není N-1, ale jen N
aproximace $p^2 \approx 0$ přípustná k malým hodnotám pojistné sazby p

$s = S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2 - 2 \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i + N \cdot p^2\right)} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i^2 - p^2} \approx S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i^2}$

odhadnutá směr. odchylka celk. škody pro všechny pojistky v tarifní skupině

$R = \sqrt{N} \cdot s \approx S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2}$

$RP = P + \frac{4R}{N} = P + \frac{4}{N} \cdot S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_i^2} = P + \frac{4}{\sqrt{N}} \cdot s$

Pojistné rezervy – nezasloužené pojistné

$$\textit{výše rezervy} = \frac{\textit{délka období po } 31.12.}{\textit{délka pojistného období}} \cdot \textit{pojistné}$$

Trojúhelníková schémata

RBNS rezerva – dosud nezlikvidované, ohlášené

IBNR rezerva – dosud neohlášené

vychází z podkladů za minulé roky – v řádcích podle roku vzniku, ve sloupcích podle let uplynutých od vzniku poj. události

obvykle zohledněná inflace

Metoda Chain Ladder – stupňovitá metoda

Rok vzniku i	Vývojový rok uplynulý od roku vzniku					
	0	**1**	**2**	**…**	**n - 1**	**n**
0	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$	…	$P_{0,n-1}$	$P_{0,n}$
1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	…	$P_{1,n-1}$	
2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	…		
…	…	…	…			
n - 1	$P_{n-1,0}$	$P_{n-1,1}$				
n	$P_{n,0}$					

- **zadané hodnoty $P_{i,j}$** – černé hodnoty jsou zadané
- **upravit o inflaci** – černé hodnoty
- **vyrobit kumulativní hodnoty $C_{i,j}$** – nasčítávám jednotlivé hodnoty (viz tabulka)
- **spočítat hodnoty λ_1** – červený obdélník děleno zelený obdélník
  λ_2 – modrý obdélník děleno žlutý obdélník atd.
- **dopočítat chybějící hodnoty** čtverce viz tabulka
- **rezerva** (oranžové hodnoty v n sloupci sečíst a odečíst od nich bílé hodnoty diagonály řádků 1 až n) viz červená čára mínus zelená čára
- **chyba odhadu** – zpětně dopočítat bílé hodnoty z bílé diagonály pomocí vzorce (př. $C_{2,2} = C_{2,3} / \lambda_3$) a pak každou buňku porovnat pomocí vzorce

$$\textit{relativní chyba odhadu} = \left|\frac{S-O}{S}\right| \cdot 100$$

S je skutečná hodnota buňky, O je odhad

Rok vzniku i	Vývojový rok uplynulý od roku vzniku					
	0	**1**	**2**	**…**	**n - 1**	**n**
0	$C_{0,0} = P_{0,0}$	$C_{0,1} = C_{0,0} + P_{0,1}$	$C_{0,2} = C_{0,1} + P_{0,2}$	…	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0} = P_{1,0}$	$C_{1,1} = C_{1,0} + P_{1,1}$	$C_{1,2} = C_{1,1} + P_{1,2}$	…	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n-1} * \lambda_n$
2	$C_{2,0} = P_{2,0}$	$C_{2,1} = C_{2,0} + P_{2,1}$	$C_{2,2} = C_{2,1} + P_{2,2}$	…		
…	…	…	…	…	…	…
n - 1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,1} * \lambda_2$	…		
n	$C_{n,0}$	$C_{n,0} * \lambda_1$	$C_{n,0} * \lambda_1 * \lambda_2$	…		

Separační metoda

Rok vzniku i	Počet škod n_j	Vývojový rok j uplynulý od roku vzniku				
		0	**1**	**2**	**…**	**n**
0	n_0	$n_0 * r_0 * \lambda_0$	$n_0 * r_1 * \lambda_1$	$n_0 * r_2 * \lambda_2$	…	$n_0 * r_n * \lambda_n$
1	n_1	$n_1 * r_0 * \lambda_1$	$n_1 * r_1 * \lambda_2$	$n_1 * r_2 * \lambda_3$	…	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$
2	n_2	$n_2 * r_0 * \lambda_2$	$n_2 * r_1 * \lambda_3$	$n_2 * r_2 * \lambda_4$	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$
…	…	…	…	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$	$\leftarrow * \lambda_{n+3}$
n	n_n	$n_n * r_0 * \lambda_n$	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$	$\leftarrow * \lambda_{n+3}$	$\leftarrow * \lambda_{n+4}$

- platí vzorec $P_{i,j} = n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}$
- r – zlikvidované škody, lambda – vzniklé škody
- zadané hodnoty – nutno podělit počtem škod, abychom mohli pokračovat ve výpočtech
- musíme spočítat hodnoty r a lambda, platí:
  $r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 1$

$$\lambda_n = \textit{diagonála}_n$$

$$r_n = \frac{S_{0,n}}{\lambda_n}$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{\textit{diagonála}_{n-1}}{1 - r_n}$$

$$r_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{1,n-1}}{\lambda_n + \lambda_{n-1}}$$

- takto pokračujeme, dokud nemáme všechny proměnné spočítané
- $\lambda_{n+1} = \lambda_n * (1+\text{inflace})$ a tímto násobíme bílé hodnoty viz tabulka
- nakonec všechny hodnoty opět vynásobíme počtem škod
- rezerva pro jednotlivé roky – sečíst hodnoty po diagonálách (tam kde je stejná lambda)
- rezerva celková – sečíst rezervy v jednotl. letech