Náhodné veličiny a vektory

David Hampel

12235@mail.muni.cz

Přednáška Statistika 1 (BKMSTAI)

12. listopad 2011, Brno

Motivace

- Aparát vybudovaný na základě pravděpodobnosti se více formalizuje pomocí funkcí, které
  - slouží jako teoretický model chování náhodné veličiny a
  - umožňují vyčíslit teoretické vlastnosti náhodné veličiny.
- Tyto funkce, „rozdělení“ náhodných veličin, lze transformovat pro různě upravené náhodné veličiny.
- S „rozdělením“ souvisí pojem kvantilů, pomocí kterých se testují hypotézy o parametrech těchto „rozdělení“.

Náhodná veličina

- **Náhodnou veličinu** X definujeme jako zobrazení $X : \Omega \mapsto R$, kde každý vzor je jevem a obraz $X(\omega)$ se nazývá číselná realizace. Obvykle se zapisuje jen symbolem X.
- Zavedení náhodné veličiny slouží zejména ke zkrácení a zpřehlednění zápisu pravděpodobností. Např. pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje v množině B zkrátíme

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \Rightarrow P(X \in B)$$

a

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B, B = (-\infty, x]\}) \Rightarrow P(X \leq x).$$

Distribuční funkce

Funkce $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x)$$

se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X. Tato funkce má následující vlastnosti:

- je neklesající, tj. pro všechna $x_1 < x_2$ je $F(x_1) \leq F(x_2)$,
- je zprava spojitá, tj pro všechna $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
- $0 \leq F(x) \leq 1$,
- pro $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, ale pevně zvolené je $P(X = x_0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$,
- pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ je $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Distribuční funkce – příklad

Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X, která udává, jaké číslo padlo při hodu kostkou.

$$x \in (-\infty, 1) : F(x) = P(X \leq x) = 0$$

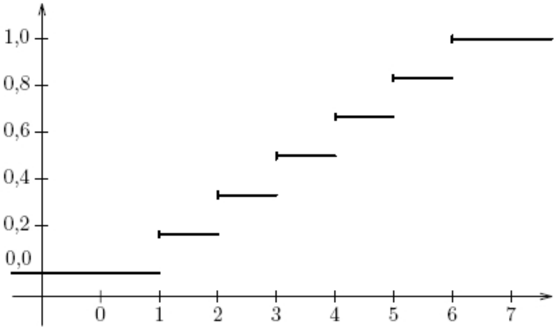
$$x \in [1, 2) : F(x) = P(X \leq x) = 1/6$$

$$x \in [2, 3) : F(x) = P(X \leq x) = 2/6$$

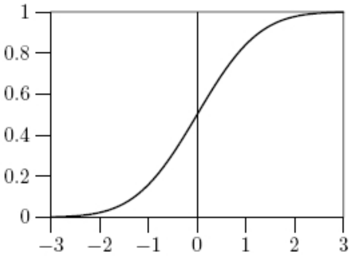
$$\vdots$$

$$x \in [6, \infty) : F(x) = P(X \leq x) = 1$$

Distribuční funkce – příklad



Distribuční funkce – příklad



Distribuční funkce $N(0, 1)$

Pravděpodobnostní funkce

Náhodná veličina X se nazývá **diskrétní**, právě když existuje funkce $p(x)$, která je

- nulová v $\mathbb{R}$ s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů,
- kladná ($\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0$),
- normovaná ($\sum_{x=-\infty}^{\infty} p(x) = 1$)
- a platí pro ni $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \sum_{t \leq x} p(t)$.

Tato funkce se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodné veličiny X.

Pravděpodobnostní funkce – vlastnosti

Pro pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X platí

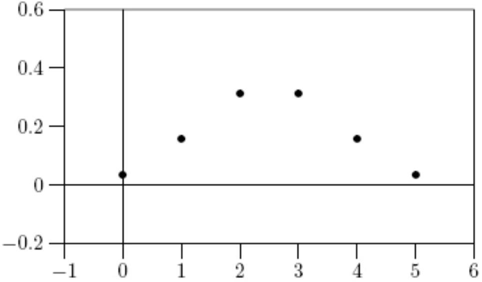
$$\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = P(X = x)$$

a pro libovolný pevně daný bod $x_0 \in \mathbb{R}$

$$p(x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x).$$

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny má schodovitý charakter.

Pravděpodobnostní funkce – příklad



Pravděpodobnostní funkce $Bi(5; 0{,}5)$.

Hustota

Náhodná veličina X se nazývá **spojitá**, právě když existuje po částech spojitá funkce, která je

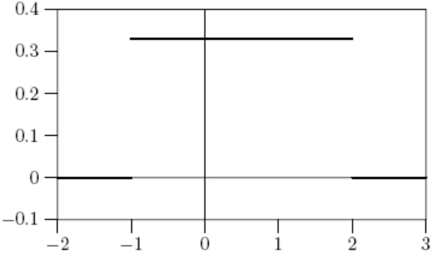
- nezáporná ($\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$),
- normovaná ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$),
- platí
$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$
- $\forall B \subseteq \mathbb{R} : \; P(X \in B) = \int\limits_{x \in B} \varphi(x)\, dx.$

Funkce $f(x)$ se nazývá **hustota pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny X. Má i následující vlastnost:

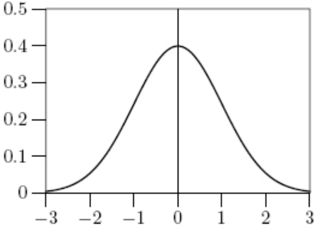
$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Distribuční funkce spojité náhodné veličiny je všude spojitá.

Hustota – příklad



Hustota $Rs(-1, 2)$.



Hustota $N(0, 1)$

Hustota – příklad 1

$$\varphi(x) = \begin{cases} k & \text{pro } x \in (980, 1020), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z normovanosti hustoty plyne: $1 = \int\limits_{980}^{1020} k\,dx = 40k$, tedy $k = \frac{1}{40}$.

Pro distribuční funkci platí:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 980, \\ \int\limits_{980}^{x} \frac{1}{40}\,dt = \frac{x-980}{40} & \text{pro } 980 < x < 1020, \\ 1 & \text{pro } x \geq 1020. \end{cases}$$

Hustota – příklad 2

Doba (v minutách) potřebná k obsloužení zákazníka v prodejně potravin je náhodná veličina, která se řídí rozložením $Ex(\frac{1}{3})$. Jaká je pravděpodobnost, že doba potřebná k obsloužení náhodně vybraného zákazníka v této prodejně bude v rozmezí od 3 do 6 minut?

Hustota – příklad 2

X – doba potřebná k obsloužení náhodně vybraného zákazníka, $X \sim Ex(\frac{1}{3})$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(3 \le X \le 6) &= \int_3^6 \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\,dx \\ &= \frac{1}{3}(-3)\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_3^6 \\ &= -e^{-2} + e^{-1} = 0{,}233. \end{aligned}$$

Náhodný vektor

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $F_1, \ldots, F_n$ jsou jejich distribuční funkce. Pak definujeme **náhodný vektor** jako uspořádanou n-tici $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Jeho distribuční funkci definujeme vztahem

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \cdots \wedge X_n \leq x_n).$$

Platí vlastnosti distribuční funkce náhodné veličiny, navíc máme

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_n) = F_i(x_i),$$

kde $F_i(x_i)$ se v této souvislosti nazývá marginální distribuční funkce náhodné veličiny X_i a $F(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá simultánní distribuční funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Diskrétní náhodný vektor

Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ se nazývá diskrétní, právě když existuje funkce $p(x_1, \ldots, x_n)$, která je

- nulová v $\mathbb{R}^n$ s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů,
- kladná
- normovaná $\left(\sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} p(x_1, \ldots, x_n) = 1\right)$
- a platí pro ni

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t_1 \leq x_1} \cdots \sum_{t_n \leq x_n} p(t_1, \ldots, t_n).$$

Funkce $p(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Diskrétní náhodný vektor

Pro pravděpodobnostní funkci dále platí

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge X_n = x_n)$$

a

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in \mathbb{R}} \sum_{x_{i+1} \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} p(x_1, \ldots, x_n) = p_i(x_i).$$

Funkce $p_i(x_i)$ se nazývá marginální pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X_i a $p(x_1, \ldots, x_n)$ simultánní pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.
Pravděpodobnost, že se náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ bude realizovat v oblasti $B \subseteq \mathbb{R}^n$, se vypočte podle vzorce

$$P(\boldsymbol{X} \in B) = \sum \cdots \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in B} p(x_1, \ldots, x_n).$$

Diskrétní náhodný vektor – příklad

x_1 \ x_2	0	1	2	3	$\pi_1(x_1)$
-1	$2c$	c	0	0	$3c$
0	c	$2c$	c	0	$4c$
1	0	0	$2c$	c	$3c$
$\pi_2(x_2)$	$3c$	$3c$	$3c$	c	1

Spojitý náhodný vektor

Náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ se nazývá spojitý, právě když existuje po částech spojitá funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$, která je

- nezáporná,
- normovaná ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$)
- a platí pro ni

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá **hustota pravděpodobosti** spojitého náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Hustota spojitého náhodného vektoru

Pro hustotu pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$ dále platí

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

a $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

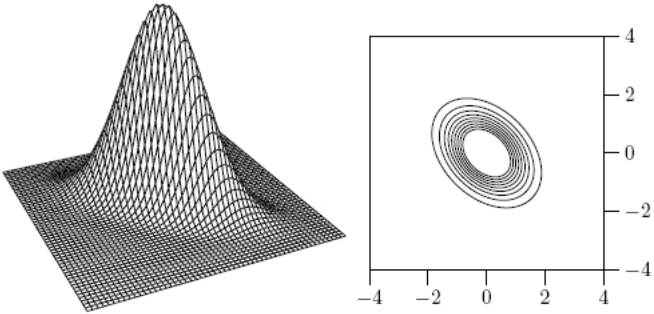
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n = f_i(x_i).$$

Funkce $f_i(x_i)$ se nazývá marginální hustota náhodné veličiny X_i a $f(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá simultánní hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Pravděpodobnost, že se náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ bude realizovat na oblasti $B \subseteq \mathbb{R}^n$ je rovna

$$P(\boldsymbol{X} \in B) = \int \cdots \int_B f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Hustota spojitého náhodného vektoru – příklad

Vrstevnice a graf hustoty dvourozměrného normálního rozložení s parametry $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$, $\rho = -0{,}75$



Stochastická nezávislost náhodných veličin

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé právě tehdy, když pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \cdots \cdot F_n(x_n),$$

respektive

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \cdot \cdots \cdot p_n(x_n)$$

v diskrétním případě nebo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n)$$

ve spojitém případě.

Stochastická nezávislost náhodných veličin – příklad

Náhodný vektor (X_1, X_2) má pravděpodobnostní funkci danou následující tabulkou.
Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny stochasticky nezávislé či nikoliv.

	X_2	
X_1	0	1
-1	$1/3$	0
0	0	$1/3$
1	$1/3$	0

Stochastická nezávislost náhodných veličin – příklad

Náhodný vektor (X_1, X_2) má pravděpodobnostní funkci danou následující tabulkou.
Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny stochasticky nezávislé či nikoliv.

	X_2		
X_1	0	1	$p_1(x_1)$
-1	1/3	0	1/3
0	0	1/3	1/3
1	1/3	0	1/3
$p_2(x_2)$	2/3	1/3	1

Stochastická nezávislost náhodných veličin – příklad

Náhodný vektor (X_1, X_2) má pravděpodobnostní funkci danou následující tabulkou.
Zjistěte, zda jsou náhodné veličiny stochasticky nezávislé či nikoliv.

X_1 \ X_2	0	1	$p_1(x_1)$
-1	**1/3**	0	**1/3**
0	0	1/3	1/3
1	1/3	0	1/3
$p_2(x_2)$	**2/3**	1/3	1

Náhodné veličiny X_1 a X_2 **nejsou** stochasticky nezávislé.

Transformované náhodné veličiny a vektory

Nechť g je vhodná funkce (nejčastěji spojitá). Pak můžeme pomocí této funkce transformovat náhodnou veličinu X na (transformovanou) náhodnou veličinu Y. Formálně píšeme

$$\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Stejně tak můžeme pomocí vhodné funkce h transformovat náhodný vektor $\boldsymbol{X}$ na transformovaný náhodný vektor $\boldsymbol{Y}$ nebo na transformovanou náhodnou veličinu Y.

- Pomocí transformací normálně rozdělených veličin se sestrojují veličiny pomocí nichž se testují hypotézy.
- **Při analýze nelze data libovolně transformovat. Většinou se tím změní jejich rozdělení a získané výsledky budou nesmyslné.**

Transformovaný náhodný vektor – příklad

Předpokládejme, že doba čekání zákazníka před pokladnou je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozdělením s parametrem λ. Náhodně vybereme n zákazníků. Jaká je pravděpodobnost, že nejdéle čekající zákazník čekal méně než y sekund?

Exponenciální rozdělení má hustotu

$$f(x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i} & \text{pro } x_i > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n$$

a distribuční funkci

$$F(x_i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x_i} & \text{pro } x_i > 0 \\ 0 & \text{pro } x_i \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Hledáme vlastně rozdělení transformované náhodné veličiny

$$Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Transformovaný náhodný vektor – příklad

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y) =$$

$$= P(X_1 \leq y \wedge \cdots \wedge X_n \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) =$$

$$= F_X(y) \cdots F_X(y) = [F_X(y)]^n = (1 - e^{-\lambda y})^n$$

Nejdéle čekající zákazník nečekal déle než y sekund s pravděpodobností $(1 - e^{-\lambda y})^n$.

Podmíněná distribuční funkce

- Nechť (X_1, X_2) je náhodný vektor se simultánní distribuční funkcí $\Phi(x_1, x_2)$.
- Podmíněná distribuční funkce $\Phi_{1|2}(x_1 | x_2)$ náhodné veličiny X_1 za podmínky, že náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2, je dána vztahem

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : \Phi_{1|2}(x_1 | x_2)$$

$$= \lim_{\Delta x_2 \to 0} P(X_1 \leq x_1 | x_2 < X_2 \leq x_2 + \Delta x_2)$$

$$= \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{P(X_1 \leq x_1 \wedge x_2 < X_2 \leq x_2 + \Delta x_2)}{P(x_2 < X_2 \leq x_2 + \Delta x_2)}.$$

- Analogicky lze definovat podmíněnou distribuční funkci $\Phi_{2|1}(x_2 | x_1)$.

Podmíněná distribuční funkce

Nechť (X_1, X_2) je náhodný vektor s marginálními distribučními funkcemi $\Phi_1(x_1)$ a $\Phi_2(x_2)$. Náhodné veličiny X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí:

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} : \Phi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) = \Phi_1(x_1)$$

a současně

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : \Phi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1 \right.\right) = \Phi_2(x_2).$$

Podmíněná pravděpodobnostní funkce

- Nechť (X_1, X_2) je diskrétní náhodný vektor se simultánní pravděpodobnostní funkcí $\pi(x_1, x_2)$ a marginálními pravděpodobnostními funkcemi $\pi_1(x_1)$ a $\pi_2(x_2)$.
- Fixujeme hodnotu x_2.
- Podmíněná pravděpodobnostní funkce $\pi_{1|2}(x_1 | x_2)$ náhodné veličiny X_1 za podmínky, že náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2, je dána vztahem

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : \pi_{1|2}(x_1 | x_2) = \frac{\pi(x_1, x_2)}{\pi_2(x_2)} \text{ pro } \pi_2(x_2) > 0.$$

- Analogicky lze definovat podmíněnou pravděpodobnostní funkci $\pi_{2|1}(x_2 | x_1)$.

Z definičního vztahu je okamžitě vidět:

$$\pi\left(x_1, x_2\right) = \pi_2\left(x_2\right)\pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right),$$

jestliže $\pi_2\left(x_2\right) > 0$, a obdobně

$$\pi\left(x_1, x_2\right) = \pi_1\left(x_1\right)\pi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1\right.\right),$$

jestliže $\pi_1\left(x_1\right) > 0$. Z těchto dvou vztahů vyplývá, že

$$\pi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1\right.\right) = \frac{\pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right)\pi_2\left(x_2\right)}{\pi_1\left(x_1\right)}$$

a podobně

$$\pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right) = \frac{\pi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1\right.\right)\pi_1\left(x_1\right)}{\pi_2\left(x_2\right)}.$$

Jedná se o Bayesův vzorec pro diskrétní náhodný vektor (X_1, X_2).

Podmíněná distribuční funkce

Je-li (X_1, X_2) diskrétní náhodný vektor, pak pro podmíněnou distribuční funkci $\Phi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2 \right.\right)$ platí:

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : \Phi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) = \frac{\sum\limits_{t \leq x_1} \pi\left(t, x_2\right)}{\pi_2\left(x_2\right)} \text{ pro } \pi_2\left(x_2\right) > 0.$$

Podmíněná pravděpodobnostní funkce

- Nechť (X_1, X_2) je diskrétní náhodný vektor s marginálními pravděpodobnostními funkcemi $\pi_1(x_1)$ a $\pi_2(x_2)$.
- Náhodné veličiny X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \pi_2(x_2) > 0 : \pi_{1|2}(x_1 | x_2) = \pi_1(x_1).$$

- Analogicky, náhodné veličiny X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \pi_1(x_1) > 0 : \pi_{2|1}(x_2 | x_1) = \pi_2(x_2).$$

Podmíněná hustota pravděpodobnosti

- Nechť (X_1, X_2) je spojitý náhodný vektor se simultánní hustotou pravděpodobnosti $\varphi(x_1, x_2)$ a marginálními hustotami pravděpodobnosti $\varphi_1(x_1)$ a $\varphi_2(x_2)$.
- Fixujeme hodnotu x_2.
- Podmíněná hustota pravděpodobnosti $\varphi_{1|2}(x_1 | x_2)$ náhodné veličiny X_1 za podmínky, že náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2, je dána vztahem

$$\forall x_1 \in R : \varphi_{1|2}(x_1 | x_2) = \frac{\varphi(x_1, x_2)}{\varphi_2(x_2)} \text{ pro } \varphi_2(x_2) > 0.$$

- Analogicky lze definovat podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $\varphi_{2|1}(x_2 | x_1)$.

Podmíněná hustota pravděpodobnosti

Podobně jako v diskrétním případě lze z definičních vztahů pro podmíněné hustoty pravděpodobnosti odvodit Bayesův vzorec pro spojitý náhodný vektor:

$$\varphi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1 \right.\right) = \frac{\varphi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) \varphi_2\left(x_2\right)}{\varphi_1\left(x_1\right)}$$

a analogicky

$$\varphi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) = \frac{\varphi_{2|1}\left(x_2 \left| x_1 \right.\right) \varphi_1\left(x_1\right)}{\varphi_2\left(x_2\right)}.$$

Podmíněná distribuční funkce

Je-li (X_1, X_2) spojitý náhodný vektor, pak pro podmíněnou distribuční funkci $\Phi_{1|2}\left(x_1 \,|x_2\right)$ platí

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} : \Phi_{1|2}\left(x_1 \,|x_2\right) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} \varphi\left(t, x_2\right) dt}{\varphi_2\left(x_2\right)} \text{ pro } \varphi_2\left(x_2\right) > 0.$$

Podmíněná hustota pravděpodobnosti

- Nechť (X_1, X_2) je spojitý náhodný vektor s marginálními hustotami pravděpodobnosti $\varphi_1(x_1)$ a $\varphi_2(x_2)$.
- Náhodné veličiny X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \varphi_2(x_2) > 0 : \varphi_{1|2}(x_1 | x_2) = \varphi_1(x_1) .$$

- Analogicky: Náhodné veličiny X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \varphi_1(x_1) > 0 : \varphi_{2|1}(x_2 | x_1) = \varphi_2(x_2) .$$

Podmíněné pravděpodobnosti

- Nechť $B \subseteq \mathbb{R}$ a náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2.
- Zajímá nás podmíněná pravděpodobnost $P\left(X_1 \in B \,|X_2 = x_2\right)$.

  a) Diskrétní případ:
  $P\left(X_1 \in B \,|X_2 = x_2\right) = \sum_{x_1 \in B} \pi_{1|2}\left(x_1 \,|x_2\right)$.

  b) Spojitý případ:
  $P\left(X_1 \in B \,|X_2 = x_2\right) = \int_{x_1 \in B} \varphi_{1|2}\left(x_1 \,|x_2\right) dx_1$.

Podmíněné rozložení s $n \geq 2$ složkami náhodného vektoru

- Vybereme marginální náhodný vektor $(X_i, \ldots, X_j)$ o n_1 složkách a zbylý marginální náhodný vektor o n_2 složkách $(n_1 + n_2 = n)$ označme $(X_k, \ldots, X_l)$.
- Pak můžeme zavést
  - podmíněnou distribuční funkci náhodného vektoru $(X_i, \ldots, X_j)$ za podmínky, že $X_k = x_k \wedge \ldots \wedge X_l = x_l$;
  - podmíněnou pravděpodobnostní funkci v diskrétním případě a
  - podmíněnou hustotu pravděpodobnosti ve spojitém případě

pomocí analogických vztahů.

Číselné charakteristiky náhodných veličin

Číselné charakteristiky náhodných veličin popisují teoretické rozdělení náhodné veličiny. Nejčastějšími charakteristikami jsou

- Kvantily spojitých náhodných veličin
- Střední hodnota
- Rozptyl
- Kovariance
- Koeficient korelace
- Šikmost
- Špičatost
- Vektorová střední hodnota
- Kovarianční matice
- Korelační matice

Kvantily spojitých náhodných veličin

Nechť $\theta \in (0,1)$. Pak $\boldsymbol{\theta}$**-kvantilem** spojité náhodné veličiny nazýváme takové číslo $K_\theta(X)$, pro něž je

$$\theta = F(K_\theta(X)) = \int_{-\infty}^{K_\theta(X)} f(x)dx.$$

- Kvantil $K_{0.50}(X)$ se nazývá **medián**,
- Kvantil $K_{0.25}(X)$ se nazývá **dolní kvartil**,
- Kvantil $K_{0.75}(X)$ se nazývá **horní kvartil**.
- Rozdíl $K_{0.75}(X) - K_{0.25}(X)$ se nazývá **mezikvartilové rozpětí**.

Kvantilové charakteristiky jsou „robustnější“ než ostatní charakteristiky, je vhodné je uvádět, pokud se v rozdělení náhodné veličiny počítá s extrémními hodnotami.

Kvantily spojitých náhodných veličin – tabulky

Pro vybrané kvantily se zavedlo speciální označení:

$$\begin{aligned}
&X \sim N(0,1) \Rightarrow K_\alpha(X) = u_\alpha,\\
&X \sim \chi^2(n) \Rightarrow K_\alpha(X) = \chi^2_\alpha(n),\\
&X \sim t(n) \Rightarrow K_\alpha(X) = t_\alpha(n),\\
&X \sim F(n_1,n_2) \Rightarrow K_\alpha(X) = F_\alpha(n_1,n_2).
\end{aligned}$$

V tabulkách nejsou všechny kvantily, je nutné dopočítat podle vztahů

$$\begin{aligned}
&u_\alpha = -u_{1-\alpha},\\
&t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n),\\
&F_\alpha(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}.
\end{aligned}$$

Kvantily spojitých náhodných veličin – tabulky

a) Nechť $U \sim N(0,1)$. Najděte medián a horní a dolní kvartil.

- $u_{0{,}50} = 0$, $u_{0{,}25} = -0{,}67449$, $u_{0{,}75} = 0{,}67449$

b) Určete $\chi^2_{0{,}025}(25)$.

- $\chi^2_{0{,}025}(25) = 13{,}12$

c) Určete $t_{0{,}99}(30)$ a $t_{0{,}05}(24)$.

- $t_{0{,}99}(30) = 2{,}4573$, $t_{0{,}05}(24) = -1{,}7109$

d) Určete $F_{0{,}975}(5,20)$ a $F_{0{,}05}(2,10)$.

- $F_{0{,}975}(5,20) = 3{,}2891$, $F_{0{,}05}(2,10) = 0{,}05156$

Střední hodnota $E(X)$

Střední hodnota $E(X)$ je číslo, které charakterizuje polohu číselných realizací náhodné veličiny X na číselné ose.

- Je-li X diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $p(x)$, pak její střední hodnota je

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p(x).$$

- Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x)$, pak její střední hodnota je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x).$$

- Nechť $Y = g(X)$ je transformovaná náhodná veličina. Pak

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{R}} g(x) \cdot p(x) & \text{v diskrétním případě,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) & \text{ve spojitém případě.} \end{cases}$$

Rozptyl $D(X)$

Rozptyl $D(X)$ je číslo, které charakterizuje variabilitu číselných realizací náhodné veličiny X kolem střední hodnoty $E(X)$.
Definujeme

$$D(X) = E([X - E(X)]^2),$$

ve výpočtech se častěji používá vztah

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Číslo $\sqrt{D(X)}$ se nazývá **odchylka** náhodné veličiny X.

Příklad

Náhodná veličina X udává počet ok při hodu kostkou. Vypočtěte její střední hodnotu a rozptyl.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1, 2, \ldots, 6 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x\pi(x) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

$$D(X) = \sum_{x=1}^{6} (x - 3{,}5)^2 \frac{1}{6} = \cdots = \frac{35}{12} = 2{,}92.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{x=1}^{6} x^2\pi(x) - 3{,}5^2$$

$$= \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - 3{,}5^2 = 2{,}92.$$

Podmíněné charakteristiky – diskrétní případ

Nechť (X_1, X_2) je diskrétní náhodný vektor a nechť $\pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right)$ je podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X_1 za podmínky, že náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2. Podmíněná střední hodnota je definována vztahem

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \pi_2\left(x_2\right) > 0 : E\left(X_1 \left| x_2\right.\right) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} x_1 \pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right)$$

a podmíněný rozptyl je definován vztahem

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \pi_2\left(x_2\right) > 0 :$$

$$D\left(X_1 \left| x_2\right.\right) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \left[x_1 - E\left(X_1 \left| x_2\right.\right)\right]^2 \pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right).$$

Tento vzorec lze upravit do výpočetního tvaru

$$D\left(X_1 \left| x_2\right.\right) = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} x_1^2 \pi_{1|2}\left(x_1 \left| x_2\right.\right) - \left[E\left(X_1 \left| x_2\right.\right)\right]^2.$$

Podmíněné charakteristiky – spojitý případ

Nechť (X_1, X_2) je spojitý náhodný vektor a nechť $\varphi_{1|2}(x_1 | x_2)$ je podmíněná hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X_1 za podmínky, že náhodná veličina X_2 nabývá hodnoty x_2. Podmíněná střední hodnota je definována vztahem

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \varphi_2(x_2) > 0 : E(X_1 | x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \varphi_{1|2}(x_1 | x_2)\, dx_1$$

a podmíněný rozptyl je definován vztahem

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \pi_2(x_2) > 0 :$$

$$D(X_1 | x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1 | x_2)]^2 \varphi_{1|2}(x_1 | x_2)\, dx_1 .$$

Tento vzorec lze upravit do výpočetního tvaru

$$D(X_1 | x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \varphi_{1|2}(x_1 | x_2)\, dx_1 - [E(X_1 | x_2)]^2 .$$

Podmíněné charakteristiky

- Při měnících se realizacích náhodné veličiny X_2 je podmíněná střední hodnota $E\left(X_1 \left| x_2 \right.\right)$ funkcí proměnné x_2 a znázorňuje průběh závislosti veličiny X_1 na veličině X_2.
- Nazývá se **regresní funkce** veličiny X_1 vzhledem k veličině X_2.
- Tvar regresní funkce charakterizuje proměnlivost střední hodnoty veličiny X_1 v závislosti na X_2.

Podmíněné charakteristiky

- Podmíněný rozptyl $D\left(X_1 \,|x_2\right)$ je funkcí hodnot veličiny X_2.
- Nazývá se **skedastická funkce** veličiny X_1 vzhledem k veličině X_2.
- Tvar skedastické funkce charakterizuje proměnlivost rozptylu veličiny X_1 v závislosti na X_2.
- Je-li skedastická funkce konstantní, řekneme, že rozložení náhodného vektoru $(X_1,\, X_2)$ je homoskedastické (tj. podmíněné rozptyly nezávisí na podmínce).
- V opačném případě se rozložení náhodného vektoru $(X_1,\, X_2)$ nazývá heteroskedastické.

Kovariance $C(X_1, X_2)$

Kovariance $C(X_1, X_2)$ je číslo, které charakterizuje společnou variabilitu číselných charakterizací náhodných veličin X_1 a X_2 kolem jejich středních hodnot.
Definujeme ji jako

$$C(X_1, X_2) = E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]),$$

užívá se i vztah

$$C(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

Je-li $C(X_1, X_2) = 0$, řekneme, že náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou nekorelované, tj. že mezi nimi neexistuje lineární závislost.

Koeficient korelace $R(X_1, X_2)$

Koeficient korelace $R(X_1, X_2)$ je číslo, které charakterizuje míru těsnosti lineární závislosti číselných realizací náhodných veličin X_1 a X_2. Nabývá hodnot z intervalu $[-1, 1]$.
Definujeme jej jako

$$R(X_1, X_2) = E\left(\frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}}\frac{X_2 - E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}}\right)$$

pro $\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} \neq 0$, $R(X_1, X_2) = 0$ jinak.

Často se používá vztah

$$R(X_1, X_2) = \frac{C(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}.$$

Momenty

Číslo

$$\mu'_k = E(X^k)$$

se nazývá obecný moment k-tého řádu. Číslo

$$\mu_k = E([X - E(X)]^k)$$

se nazývá centrální moment k-tého řádu.

Momenty

Pomocí momentů můžeme definovat **šikmost** (asymetrii) náhodné veličiny X jako

$$A_3(X) = \frac{\mu_3}{\sqrt{D(X)}^3}$$

a **špičatost** (exces) náhodné veličiny X jako

$$A_4(X) = \frac{\mu_4}{\sqrt{D(X)}^4} - 3.$$

Pro normální rozdělení $N(0,1)$ vychází $A_3(X) = 0$ a $A_4(X) = 0$. Šikmost a špičatost se dají využít k testování hypotéz o rozdělení.

Vlastnosti číselných charakteristik

- Nechť a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 jsou reálná čísla,
- X, $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_m$ jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru.
- V následujících vzorcích vždy z existence číselných charakteristik na pravé straně vyplývá existence výrazu na levé straně.

Vlastnosti střední hodnoty

a) $E(a) = a$,

b) $E(a + bX) = a + bE(X)$,

c) $E(X - E(X)) = 0$,

d) $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$,

e) Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé, pak platí $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Vlastnosti kovariance

a) $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = C(a_1, a_2) = 0$,

b) $C(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = b_1b_2C(X_1, X_2)$,

c) $C(X, X) = D(X)$,

d) $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$,

e) $C(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$,

f) $C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$.

Vlastnosti rozptylu

a) $D(a) = 0$,

b) $D(a + bX) = b^2 D(X)$,

c) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$,

d) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} C(X_i, X_j)$

e) Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nekorelované, pak
$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$.

Vlastnosti koeficientu korelace

a) $R(a_1, X_2) = R(X_1, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$,

b) $R(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = \operatorname{sgn}(b_1b_2)R(X_1, X_2)$,

c) $R(X, X) = 1$ pro $D(X) \neq 0$, $R(X, X) = 0$ jinak,

d) $R(X_1, X_2) = R(X_2, X_1)$

e) $R(X_1, X_2) = \begin{cases} \frac{C(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} & \text{pro } \sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} > 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$

f) $|R(X_1, X_2)| \leq 1$ a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když mezi veličinami X_1, X_2 existuje s pravděpodobností 1 úplná lineární závislost, tj. existují konstanty a_1, a_2 tak, že $P(X_2 = a_1 + a_2X_1) = 1$. (Uvedená nerovnost se nazývá Cauchyova-Schwarzova-Buňakovského nerovnost.)

Charakteristiky náhodných vektorů

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor. Reálný vektor

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), \ldots, E(X_n))$$

se nazývá **vektor středních hodnot**. Reálná čtvercová symetrická matice

$$\operatorname{var}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \cdots & C(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C(X_n, X_1) & C(X_n, X_2) & \cdots & D(X_n) \end{bmatrix}$$

se nazývá **varianční matice** a reálná čtvercová symetrická matice

$$\operatorname{corr}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \cdots & R(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(X_n, X_1) & R(X_n, X_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá **korelační matice**.