Od Náhodné Procházky Ke Spojitým Modelům

Silvie Kafková

9.prosince 2013, FIMA

Obsah

Obsah

Motivace

Kurz akcie se vyvíjí podle nějakého trendu, ale obsahuje také ***náhodnou složku***.

Motivace

- Jednou ze součástí teorie efektivních trhů je teze, že kurzy akcií se chovají nepředvídatelně.
- Můžeme říci, že konají ***náhodnou procházku***.
- Platí tedy, že pravděpodobnost, že akcie vzroste, je stejná jako pravděpodobnost, že akcie klesne.
- Podle této teorie tak nelze předpovídat budoucí pohyby cen, ačkoliv teorie připouští, že v dlouhém období zachovávají akcie růstový trend.

Obsah

Náhodná procházka

V roce 1905 náhodnou procházku přiblížil širší veřejnosti ***Karl Pearson*** ve své publikaci pomocí příkladu chůze opilce.

Příklad

Představme si opilce zanechaného na nějakém konkrétním místě uprostřed louky. Po určitém čase je pravděpodobnost jeho nalezení v bezprostřední blízosti místa jeho zanechání výrazně vyšší než v jakémkoli jiném místě téže louky.

Jednoduchá náhodná procházka

Příklad

Představme si hráče v kasinu. Hráč hází mincí proti bankéři. Jestliže hodí pannu, vyhraje 1 Kč, jestliže padne orel, 1 Kč vyhraje bankéř. Hra končí po zruinování našeho hráče.

- Typický příklad, který se dá řešit pomocí náhodné procházky.
- Odtud také název ***ruinování hráče.***

Jednoduchá náhodná procházka

- Zavedem stochastický proces $\{X_t; t \in T\}$.
- Jeho prvky tvoří posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ nezávislých náhodných veličin.
- Náhodné veličiny mohou nabývat hodnoty 1 s pravděpodobností p a hodnoty -1 s pravděpodobností $q = 1 - p$.
- Veličiny $X_1, X_2, \ldots$ budou označovat jednotlivé hody našeho hráče.
- Budeme dále předpokládat, že hráč přišel do kasina s obnosem S_0.

Jednoduchá náhodná procházka

- Celkové bohatství našeho hráče na konci hry po n hodech označme jako S_n.
- Pak tedy platí

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- Posloupnost S_n nazýváme ***jednoduchou náhodnou procházkou***.
- Jednoduchá odpovídá jednomu rozměru, tedy pohybu částice po přímce.

Symetrická náhodná procházka

- Je důležité s jakou pravděpodobností se částice pohybuje jedním nebo druhým směrem.
- Od této pravděpodobnosti se odvíjejí pravděpodobnosti možných výsledků.
- Nejjednodušší je případ, kdy platí $p = q$.
- Pak pravděpodobnost pohybu v obou směrech je stejná, tedy $\frac{1}{2}$.
- Taková náhodná procházka se nazývá ***symetrická***.

Symetrická náhodná procházka

- Pro symetrickou náhodnou procházku platí, že nezávislé náhodné veličiny posloupnosti $X_1, X_2, \ldots$ nabývají hodnot 1 nebo -1 se stejnou pravděpodobností.
- Mezi základní vlastnosti symetrické náhodné procházky patří
  - prostorová homogenita,
  - časová homogenita,
  - Markovova vlastnost.

Vlastnosti symetrické náhodné procházky

Lemma

Jednoduchá náhodná procházka je prostorově homogenní, tedy platí

$$\mathrm{P}\left(S_n = j | S_0 = a\right) = \mathrm{P}(S_n = j + b | S_0 = a + b).$$

Důkaz.

Obě strany jsou rovny

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a\right).$$

$\square$

Vlastnosti symetrické náhodné procházky

Lemma

Jednoduchá náhodná procházka je časově homogenní, tedy platí

$$\mathrm{P}\left(S_n = j | S_0 = a\right) = \mathrm{P}(S_{n+m} = j | S_m = a).$$

Důkaz.

Obě strany se rovnají, neboť

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i = j - a\right).$$

$\square$

Vlastnosti symetrické náhodné procházky

Lemma

Jednoduchá náhodná procházka splňuje Markovovu vlastnost, tedy prom $n \geq 0$ platí

$$\mathrm{P}\left(S_{m+n} = j | S_0, S_1, \ldots, S_m\right) = \mathrm{P}(S_{m+n} = j | S_m).$$

Důkaz.

Je zřejmé, že pokud známe S_m, pak S_{m+n} závisí pouze na krocích $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_{m+n}$, nikoli na krocích předchozích. $\square$

Vlastnosti symetrické náhodné procházky

Mezi důležité vlastnosti náhodné procházky také patří vlastnost vyjádřená následující větou.

Věta (Pólyova)

Pravděpodobnost návratu částice konající jednoduchou symetrickou náhodnou procházku do své výchozí polohy je rovna 1.

Neférová náhodná procházka

Příklad

Uvažujme opět našeho hráče v kasinu, který hraje proti bankéři. Ale tentokrát je pravděpodobnost výhry $p < \frac{1}{2}$. Tzn., že bankéř svou pravděpodobnost výhry zmanipuluje ve svůj prospěch. Pravděpodobnost prohry hráče je pak $q = 1 - p$.

Značení

- A ... naše celkové bohatství,
- B ... bankéřovo cekové bohatství,
- N ... $A + B$,
- x_i ... pravděpodobnost našeho zruinování při stavu našeho bohatství i.

Neférová náhodná procházka

- Uvažujme případ, kdy $N = 5$.
- Hledáme pravděpodobnosti $x_0, x_1, ..., x_5$.
- Je jasné, že $x_0 = 1$, neboť jakmile bude hráč jednou zruinován, hra končí.
- Dále také známe $x_5 = 0$, jelikož jestliže bude zruinován bankéř, hráčova výhra je jistá.

- Čemu se rovnají ostatní pravděpodobnosti?
- Jak vypadá obecný vzorec pro libovolné N, A, B?

Neférová náhodná procházka

Po zobecnění na libovolnou hodnotu N, A, B získáme obecné řešení

$$x_A = \frac{1 - r^B}{1 - r^N}$$

- Pokud bude N dostatečně velké, pak se jmenovatel blíží 1.
- V tom případě pravděpodobnost zruinování hráče závisí pouze na koeficientu r a jmění bankéře B.
- Jestliže bude B dostatečně velké, pak $r^B \to 0$ a pravděpodobnost zruinování hráče je téměř jistá.

Martingal

Teorie martingalu se začala vytvářet, když lidé pochopili, že ve férových hrách nelze vydělávat peníze.

Definice

*Posloupnost náhodných proměnných $\{M_n; 0 \leq n < \infty\}$ nazveme **martingalem** vzhledem k $\{X_n; 1 \leq n < \infty\}$, tj. posloupnosti náhodných proměnných, jestliže splňuje dvě základní vlastnosti:*

- *pro každé $n \geq 1$ existuje $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : M_n = f_n(X_1, \ldots, X_n)$,*
- *posloupnost $\{M_n\}$ splňuje pro každé $n \geq 1$ základní martingalovou identitu*

$$\mathrm{E}(M_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) = M_{n-1}.$$

Martingal

- Martingaly patří k hlavním nástrojům studia stochastických procesů.
- Maringalová identita vede k teorii, která vysvětluje skutečnost, že hráč ve férové hře nemůže očekávat peněžní výhru, i když chytře mění své sázky.

Příklad

Ukažte, že jestliže jsou X_n nezávislé náhodné proměnné s $\mathrm{E}(X_n) = 0$ pro každé n, pak parciální součet procesů daných $S_0 = 0$ a $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pro každé n je martingal vzhledem k posloupnosti $\{X_n; 1 \leq n < \infty\}$.

Obsah

Teorie efektivních trhů

- ***Paul Cootner*** uvedl ve své publikaci z roku 1964, že pokud jsou kapitálové trhy dostatečně konkurenční, potom investoři nemohou očekávat dosažení maximálních zisků ze svých investičních strategií.
- Fyzik ***M. Osborne*** přirovnává pohyby tržních cen k náhodnému pohybu molekul.
- ***Eugen Fama*** svou disertační práci vydanou v roce 1965 zakončil větou: "Dá se s jistotou říci, že předložená práce uvedla jasné důkazy ve prospěch hypotézy existence náhodné procházky v tržních cenách."
- ***Paul Samuelson*** podpořil zkoumaný koncept tvrzením: "Pokud by si každý byl jist, že ceny porostou, byly by již dávno vzrostly".

Teorie efektivních trhů

Teorie efektivních trhů tvrdí, že se ***cena akcie musí pohybovat náhodně***. Existují pro to 2 hlavní důvody

- Současná cena akcie již odráží všechny dostupné informace. Proto nemá cenu zkoumat historická data.
- Jestliže se na trhu objeví nějaká nová informace, trh na ni reaguje okamžitě.

Tedy modelovat cenu akcie znamená odhadnout příchod nové informace, díky které se cena změní. To znamená, že neočekávané změny ceny akcie mají ***Markovovu vlastnost*** (jako náhodná procházka).

Analýza cen akcií

Existují dva hlavní přístupy k analýze cen akcií:

- ***Technická analýza*** - spočívá v dlouhodobém sledování pohybu cen akcií a na základě výsledných pozorování padne rozhodnutí o nákupu či prodeji.
- ***Fundamentální analýza*** - dochází k určování vnitřní hodnoty akcie. Nezáleží na historických datech, jen na aktuálním rozdílu mezi vnitřní hodnotou a tržní cenou akcie. Dle této teorie cena nepodléhá trendu a nelze ji do budoucna určit zkoumáním cen akcií. Jen s určitou pravděpodobností je možné odhadnout budoucí cenu akcie, která závisí pouze na nynější hodnotě.

Analýza cen akcií

Příklad

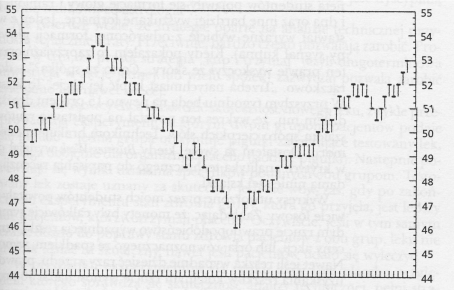
- ***Burton G. Malkiel*** *otestoval svého kolegu technického analytika.*
- *Při vyučování požádal studenty, aby házeli mincí a výsledky hodů zakreslovali do grafu.*
- *Počátkem byla cena akcie* 50\$.
- *U náhodné procházky platí, že pokud se částice konající náhodnou procházku nachází v kladné části, je pravděpodobné, že se v ní bude dlouhodobě pohybovat i nadále.*
- *Proto situace odpovídala reálné situaci na trhu a existovalo zde minimální riziko poklesu ceny do záporných hodnot.*

Analýza cen akcií

Řešení

- V grafech se začaly objevovat známé obrazce podněcující k nákupu či prodeji akcií.
- Jeden takový graf odnesl Malkiel svému příteli.
- Ten chtěl okamžitě kupovat, protože viděl známou sekvenci pohybu cen akcií.

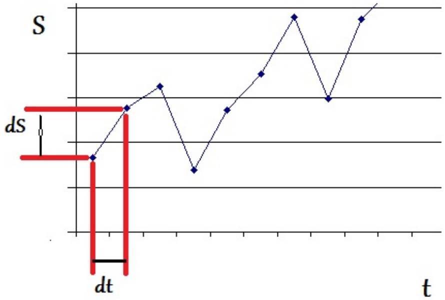
Pohyb cen dané akcie generovaný mincí



Obsah

Změna ceny akcie

- Označme si cenu akcie v čase t jako S.
- Uvažujme následující krátký časový interval, který označíme jako $\mathrm{d}t$.
- Během tohoto intervalu se cena akcie S změní na cenu $S + \mathrm{d}S$.



Model výnosu akcie

Výnos akcie $\frac{\mathrm{d}S}{S}$ můžeme rozdělit na dvě části:

- Jedna část je předvídatelná, **deterministická** a odpovídá výnosu peněz uložených v bance (bezriziková investice). Tuto část označujeme jako
$$\mu \,\mathrm{d}t,$$
kde μ značí průměrnou míru růstu ceny akcie a nazýváme ho ***drift***. V jednodušších modelech bývá μ konstantní.
- Druhá část je ***stochastická***. Ta odráží náhodné změny ceny akcie, jako je třeba změna způsobená nečekanou informací. Značíme ji jako
$$\sigma \,\mathrm{d}W,$$
kde σ nazýváme ***volatilitou.*** Volatilita vyjadřuje směrodatnou odchylku výnosu akcie. W označuje ***Wienerův proces***.

Model výnosu akcie

- Výnos akcie můžeme tedy zapsat pomocí ***stochastické diferenciální rovnice***

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W.$$

- Tato je matematickým zápisem pro matematický model výnosu akcie.
- Kdybychom v této rovnici položili $\sigma = 0$, pak by výnosu odpovídala deterministická rovnice

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\,\mathrm{d}t.$$

- Jejím řešením je pak

$$S = S_0\,\mathrm{e}^{\mu(t-t_0)},$$

kde S_0 je cena akcie v čase $t = t_0$.

Wienerův proces

- Náhodná složka výnosu akcie je tvořena ***Wienerovým procesem*** W_t.
- Tento proces můžeme chápat jako ***limitní případ náhodné procházky***, kde se délka jednoho kroku blíží nule.
- Vlastnosti Wienerova procesu:
  - $W_0 = 0$, tedy Wienerův proces začíná v počátku.
  - Jeho trajektorie je spojitá.
  - Platí, že jeho přírůstky jsou nezávislé a normálně rozdělené. Střední hodnota přírůstků $W_{s+t} - W_t$ je 0 a rozptyl je s.

Model výnosu akcie

Příklad

Současná cena akcie je $S_0 = 1\$$. *Víme, že* $\mu = 1$ *a* $\sigma = 0.2$, *když* $\mathrm{d}t$ *je 1/250 (rok má 250 obchodních dní). Nyní se vygeneruje náhodné číslo s normálním rozložení* $N(1, 1/250)$, *to bude* $\mathrm{d}W$. *Předpokládejme, že se vygenerovalo číslo* $\mathrm{d}W = 0.08352$. *Určete změnu ceny akcie* $\mathrm{d}S$.

Děkuji za pozornost!