

10. seminář:

Nelineární optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti i nerovností (KKT podmínky)

Příklad 1: Úloha o rozdělení spotřeby v čase:

Předpokládejme, že chceme maximalizovat užitek ze spotřeby během dvou období, ve kterých máme příjmy I_1 a I_2 , přičemž nespotřebované prostředky z prvního období můžeme zúročit s úrokovou mírou r . Užiteková funkce se předpokládá ve tvaru $U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta \cdot u(C_2)$, kde $\beta \in (0, 1)$ je koeficient vyjadřující subjektivní preferenci současné spotřeby před spotřebou budoucí.

- Sestavte Lagrangeovu funkci a zapište podmínky prvního řádu, jako proměnné přitom uvažujte C_1, C_2, S_1 a jako omezující podmínky rozpočtová omezení v jednotlivých obdobích.
- Najděte řešení podmínek, předpokládáme-li užitekovou funkci ve tvaru

$$u(C) = \ln C$$

Příklad 2: Vyřešte úkoly 1,2 a 3 ze soutěžního příkladu MUESu, jehož kompletní zadání i s řešením naleznete v učebních materiálech ISu: soubor soutěž.pdf (použito s laskavým souhlasem M. Kvasničky)

- Předpokládejme, že Milton Friedman vlastní domeček, kde bydlí. V domečku má samozřejmě i vodovod, takže spotřebovává vodu (na pití, mytí, do bazénu apod.) a ostatní statky. Friedman má roční příjem M dolarů. Dále víme, že jeho preference je možné popsat indifferenční křivkou

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}$$

kde W je jeho spotřeba vody ve vhodných jednotkách, C je jeho spotřeba ostatních statků (opět ve vhodných jednotkách) a U je číslo indifferenční křivky, kterou mu daný spotřební koš zajistí. Předpokládejme dále, že jednotky, ve kterých je počítána voda i ostatní statky, jsou zvoleny tak vhodně, že cena jednotky vody i jednotky ostatních statků je právě 1 dolar. Zjistěte, kolik vody a kolik ostatních statků bude Milton Friedman spotřebovávat.

- Po nějaké době bylo Friedmanovi v jeho domě smutno. Proto pozval další dva ekonomy, aby bydleli s ním. (Jména těchto pánů byla Keynes a Marx.) Domeček měl však pouze jeden vodoměr. Protože pánové byli tři, rozdělili

vždy poplatky za vodu rovným dílem. Předpokládejme, že Keynes s Marxem spotřebují každý konstantní množství vody – právě tolik vody, kolik spotřeboval Friedman, dokud bydlel v domečku sám (protože Friedman je bezesporu racionální, spotřeboval právě optimální množství vody). Kolik bude za těchto okolností spotřebovat Milton Friedman vody a kolik ostatních statků?

- c) V minulém případě jsem vám ovšem trochu lhal: Keynes s Marxem samozřejmě nespotebovávají konstantní množství vody. I oni jsou celkem racionální (aspoň když se starají o vlastní užitek), a tak kupují takové množství vody a ostatních statků, aby maximalizovali svůj užitek (jsou to ekonomové!). Každý z nich má stejné preference a příjem jako Friedman. Kolik tedy bude (v rovnováze) spotřebovat každý z ekonomů vody a kolik ostatních statků, jestliže si budou dělit náklady na vodu rovným dílem?

Příklad 3: Je třeba připravit plán výroby pro výrobní linku, na které je možno vyrábět pět typů výrobků, přitom je třeba dodržet následující podmínky:

- Výrobní náklady nesmějí přesáhnout 1090 Kč.
- Výrobek pátého typu je používán pro kompletaci všech ostatních typů výrobků a alespoň 10 kusů je ho potřeba vyrobit navíc jako náhradní díly.
- Výrobků druhého typu je potřeba vyrobit o 4 kusy více než výrobků čtvrtého typu.
- Tržby za prodané výrobky závisejí na prodaném množství, při větším prodeji mohou být jednotkové tržby nižší podle funkcí uvedených v následující tabulce.

| | | | | | |
|----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----|
| množství výrobků typu 1-5 | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 |
| jednotkové výrobní náklady | 5 | 5 | 6 | 5 | 2 |
| tržby | $57-0,03.V1$ | $82-0,05.V2$ | $84-0,05.V3$ | $62-0,04.V4$ | 12 |

Kolik výrobků jednotlivých typů by měla výrobní linka v následujícím období vyrobit, aby bylo dosaženo maximálních tržeb?

- Sestavte matematický model problému
- Sestavte Lagrangeovu funkci
- Sestavte Kuhn-Tuckerovy podmínky

d) Najděte řešení problému pomocí MS Excelu