

2.1 Axiomaticko-testový přístup Irvinga Fishera, jeho současníků a následovníků

Axiomatická/testová teorie indexních čísel¹, jejímž iniciátorem byl **Irving Fisher** na počátku 20. století, sestává z několika logicky odůvodněných předpokladů, jejichž splnění lze vyžadovat od každého dostatečně “rozumného” indexního čísla. Výčet ani přesné formulace těchto axiomů/testů nejsou však všemi problémem se zabývajícími autory přijímány jednotně. Zde se přidržíme původních formulací, kategorizace a uspořádání testů zastávaných **Irvingem Fisherem** a jeho současníky. Ve druhé polovině 20. století byly formulovány ještě další testy, které původní **Fisherovu axiomatickou soustavu** doplňují, resp. rozšiřují. Z nich zde uvádíme jen ty, které jsou čteněji komentovány v literatuře a které mohou být dostatečně průhledně interpretovány. S ohledem na některá aktuální pojednání nelze do budoucna očekávat, že se na této „systavě“ něco ještě podstatněji změní. Zde uvedené axiomy/testy budeme značit **(F1) - (F12)**, přičemž jako prvních 8 axiomů uvádíme ty, které pocházejí z **Fisherova, Walshova, Bowleyho** či **Frischova** období.

Dobré indexní číslo by mělo vyhovovat co největšímu počtu z těchto požadavků.

(F1w) test (slabé) identity [weak identity test]:

Jestliže platí $p(0) = p(1)$ **a** současně $q(0) = q(1)$, **pak** $\tilde{P}_{01} = 1$, což lze psát $P_{00} = 1$.

(F1s) test (silné) identity [strong identity test]:

Jestliže platí $p(0) = p(1)$ **pak** $\tilde{P}_{01} = 1$

říká, že “neutrální” hodnota indexního čísla (vzatého jako podílový ukazatel) je rovna jedné. Shodu cen (příp. i kvantit) v obou obdobích lze pokládat též za “nedostatek času” ke změně komplexu. Test **(F1w)** je splněn všemi uvedenými indexními čísly.

(F2w) test záměny faktorů [factor reversal test]: $P_{01} \cdot \tilde{P}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$ resp.

(F2s) „součinný“ test² [product test]:

$$P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

požadují, aby hodnota součinu P_{01} a indexního čísla \tilde{P}_{01} též konstrukce získaného záměnou cen za kvantitu a obráceně (interpretovatelného obvykle jako kvantový index) dávala podíl peněžních agregátů, tj. vynaložených výdajů na komodity v běžném a základním období³.

¹ Není podstatné, zda používáme pojem *test* či *axiom*. Jde tak či onak o podmínku, kterou určitý konstrukt tj. indexní číslo testujeme z toho hlediska, zda jej splňuje nebo ne, či se na ni díváme jako na postulát vyvozený z elementární ekonomicko-matematické podstaty věci, který by měl být indexním číslem splněn.

² Možná ne zřetelně postřehnutelný rozdíl mezi tímto a předchozím testem **(F2w)** spočívá v tom, že ne vždy je kvantové indexní číslo vytvořeno mechanickou záměnou cen a kvantit z cenového a naopak.

³ Výraz na pravé straně **(F2)** by mohl být považován také za určitý typ indexního čísla, avšak při bližším zkoumání zjistíme, že jeho konstrukce není vhodná - viz dále komentář k **(F11)**.

(F3) test záměny období (míst) [time reversal test]:

$$P_{01} \cdot P_{10} = 1$$

znamená požadavek, aby při "inverzním" pohledu na změnu komplexu v čase (návrat do výchozího období) bylo "časově převrácené" indexní číslo reciprokou hodnotou původního. Tentýž požadavek lze analogicky vyslovit při prostorovém srovnání, kde ovšem zpravidla máme libovůli při přiřazení "0" a "1" srovnávaným územním celkům.

(F4s) test okružnosti (též cirkularity či tranzitivity) [circularity test]: $P_{02} = P_{01} \cdot P_{12}$

požaduje, aby se přechod ze základního období "0" do běžného období "2" (přes meziobdobí "1") odehrál bez tranzitivního zkreslení (a to při libovolném meziobdobí). Při územním srovnání půjde o analogický požadavek, ať volíme "přestupný" územní celek jakkoliv.

Slabší vyjádření předchozího testu představuje

(F4w) bazický test [base test]:

výraz $P_{01} = \frac{P_{02}}{P_{12}}$ je nezávislý na volbě období „2“.

Ten (pouze) požaduje, aby podíl P_{02} / P_{12} byl nezávislý na hodnotách $p(2), q(2)$ neboli, aby srovnání vývoje spotřeb a cen základního období vůči spotřebám a cenám běžného období prováděné přes třetí časový bod nebylo závislé na hodnotách výchozího období.

(F5) test určenosti [determinateness test]:

P_{01} je vždy určité, konečné a ne identicky nulové reálné číslo.

představuje požadavek, aby indexní číslo bylo vždy definováno a mělo konečnou, ne identicky nulovou hodnotu v jakékoliv situaci (např. při nepřítomnosti některé z komodit v základním nebo v běžném období). Zesílenou verzí tohoto testu je níže uvedený axiom (F12).

Další dvojici představují

(F6w) test (slabé) souměřitelnosti [commensurability test] konstatující toto

Jestliže provedeme stejnou proporční změnu měrových jednotek kvantit, tj. $q_i^*(1) = d \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d \cdot q_i(0)$ pro nějaké reálné $d > 0$ a adekvátní změnu cen $p_i^*(1) = d^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{P}_{01} = P_{01}$, neboli

P_{01} nezávisí na měrové jednotce komodit, popř.

(F6s) test (silné) souměřitelnosti konstatující totéž, ovšem za volnější podmínky

pokud ceny i kvantit změním vzájemně konformně (každou však v obecně jiném poměru)

Jestliže platí $q_i^*(1) = d_i \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d_i \cdot q_i(0)$ pro nějaký vektor d s kladnými složkami a podobně $p_i^*(1) = d_i^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d_i^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{P}_{01} = P_{01}$.

Slabá i silná verze testu vyjadřují očekávání, že indexní číslo nesmí být ovlivněno

změnou velikosti měrových jednotek komodit analyzovaného souboru: např. v situaci, kdy se mění měrové jednotky, ve kterých uvádíme množství komodit, musí být zachována hodnota indexního čísla vyčíslená před touto změnou a po ní. Jako příklad vezmeme situaci, kdy přecházíme z kg na tony: jednotková cena komodity se 1000-násobně zvětší, avšak současně se také 1000-násobně zmenší původní množství komodity vyjádřené v nové jednotce ($\text{kg} = 0,001\text{t}$). Konstrukce indexního čísla musí být vůči těmto změnám invariantní.

(F7w) test (slabé) úměrnosti [weak proportionality test]:

**Jestliže platí $p_i(I) = c \cdot p_i(0)$ a též $q_i(I) = q_i(0)$ pro všechna i
a pro nějakou konstantu $c > 0$, pak musí platit $\tilde{P}_{0I} = c$.**

Upuštěním od druhé podmínky získáme

(F7s) test (silné) úměrnosti [strong proportionality test]:

**Jestliže platí $p_i(I) = c \cdot p_i(0)$ pro všechna i (nezávisle na hodnotách kvantit)
a pro nějakou kladnou konstantu c , pak musí platit $\tilde{P}_{0I} = c$.**

Axiom (F7s) vyžaduje, aby v "ideálním" případě, kdy by ceny všech komodit vzrostly ve stejném poměru (např. c -násobně), bylo cenové indexní číslo rovno příslušné konstantě úměrnosti c . Jiná hodnota by zřejmě signalizovala nekorektnost konstruktů. K platnosti slabé verze tohoto testu postačuje, platí-li tento závěr tehdy, nedojde-li mezi základním a běžným obdobím k žádným změnám v kvantitách..

Dále máme

(F8) test symetrie [symmetry test] vyslovuje požadavek, že

**Indexní číslo je invariantní vůči jakékoliv permutaci (záměně) pořadí
cen komodit (při analogické záměně pořadí příslušných kvantit).⁴**

Je zřejmé, že závislost hodnoty indexního čísla na pořadí komodit nelze připustit, neboť bychom nemohli přistupovat ke všem statkům v příslušném konstruktů rovnocenně.

Axiom (F8) splňují zřejmě všechny v části [2.1] uvedené návrhy "inteligentních" indexních čísel. Protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikační operace (se stejným následným dopadem na aritmetický i geometrický způsob průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciální kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

⁴ Z uvedených 8 testů je Irvingu Fisherovi [1911], [1922] přímo přisuzováno autorství axiomů (F1), (F3), (F6), (F8) a spolu s C.M.Walshem [1901] test (F7), zatímco axiom okružnosti (F4) formuloval Dán Harald Ludwig Westergaard [1890]. Důraz na význam axiomu záměny faktorů (F2) kladl zejména norský ekonom (a nobelista) Ragnar Frisch [1930]. Test (F6) poprvé navrhl významný dánský národohospodář Nikolaas Gerard Pierson [1896] pod názvem *test invariance vůči změnám v jednotkách měření*. Tentýž autor vyslovil poprvé podnět pro test (F3). E.Laspeyres [1871] se mj. zasloužil o uvedení testu (F1s) představované požadavkem, aby hodnota cenového indexního čísla byla rovna 1, kdykoliv za $p(0)$ a $p(I)$ dosadíme shodné vektory.

(F9) test monotónnosti: [monotonicity test]

Jestliže platí $p_i(I) \leq p_i^*(I)$ pro všechna i při nezměněných $p(0), q(0), q(I)$,
potom vždy platí $P_{0I} \leq P_{0I}^*$.

Axiom říká, že taková změna cen všech komodit mezi základním a běžným obdobím, při které jsou alternativně vzaté hodnoty cen $p_i^*(I)$ u všech komodit nejméně rovné původním cenám $p_i(I)$ běžného období, musí vést k indexnímu číslu, které je hodnotou aspoň stejně velké jako původní indexní číslo.

(F10) test střední hodnoty [mean value test] [W.Eichhorn – J.Voeller 1976]

$$\text{Min}_{I=1, \dots, N} \frac{p_i(I)}{p_i(0)} \leq P_{0I} \leq \text{Max}_{I=1, \dots, N} \frac{p_i(I)}{p_i(0)}$$

požaduje, aby se velikost (cenového) indexního čísla vždy nacházela mezi hodnotami nejmenší a největší individuální poměrové cenové změny.

(F11) test invariance vůči změnám v měřítkách [Y.Vartia [1985].

Změníme-li peněžní jednotku shodně u všech cen v obou obdobích "0" a "1",
tzn. položíme-li $p^*(0) = d \cdot p(0)$ a $p^*(1) = d \cdot p(1)$,

pak při libovolných proporčních změnách měrových jednotek kvantit v základním i běžném období, přičemž v každém období může jít o jinou proporční změnu v jednotkách měření kvantit, tzn. $q^*(0) = b \cdot q(0)$ a $q^*(1) = c \cdot q(1)$, musíme dospět k původní hodnotě indexního čísla.

Jestliže tedy změněné indexní číslo (s ohvězdičkovanými veličinami) označíme P_{0I}^* ,
musí platit $P_{0I}^* = P_{0I}$.

Smyslem testu je, aby "vážení" spotřebami probíhalo vždy srovnatelným způsobem (tedy se spotřebami vzatými buď vždy ze základního nebo vždy z běžného období). Tomuto testu nevyhovuje např. konstrukt objevující se na pravé straně testu záměny faktorů (F2), pokud bychom uvažovali o jeho použití též jako jistého "indexního čísla".

(F12) test konzistence při mizející komoditě [diminishing commodity consistency test] [Erwin Diewert 1992], vyjádřený následující podmínkou

$$\lim_{q_N(0) \rightarrow 0, q_N(1) \rightarrow 0} P_{0I}^{(N)} = P_{0I}^{(N-1)}$$

kde výrazy $P_{0I}^{(N)}, P_{0I}^{(N-1)}$ označují totéž indexní číslo, jednou spočtené včetně, podruhé bez určité (pro jednoduchost zápisu řekněme N-té) komodity:

Pokud se množství kterékoliv komodity neomezeně zmenšuje, musí být limitním výrazem indexní číslo vytvořené pouze ze zbývajících $N - 1$ komodit.

⁵ Bylo by zřejmě velmi nepřirozené, pokud by (cenový) index z tříkomoditního spotřebního koše s hodnotami podílových cenových změn 1.03, 1.04 a 1.06 dával hodnotu 1.02 nebo na druhé straně třeba 1.08.

Tento test je jistým zkonkrétním testu určenosti (F5), protože říká nejen to, co nesmí nastat v případě, že se některá z komodit v základním nebo v běžném období nevyskytuje, ale přímo určuje tvar výsledného indexního konstruktů v takovémto případě.

2.2 Nekonzistence a neúplnost Fisherovy axiomatické soustavy

Rozsáhlý „sortiment“ v úvahu přicházejících indexních čísel a dost početný okruh testů spojených s vyšetřováním teoretických vlastností vede k položení tří základních otázek:

- Je (přínejmenším všech prvních 8 testů (F1) - (F8) vzájemně nezávislých ?
- Je daná soustava testů/axiomů vzájemně konzistentní, resp. jinými slovy: existuje indexní číslo splňující všechny testy?
- Vede splnění všech testů, případně omezení se na nějakou vybranou podskupinu z nich, k určení konkrétního tvaru indexního čísla?

Pokud jde o **soustavu původních 8 Fisherových testů**, je (bohužel) **odpověď** na každou z těchto otázek **záporná**.

Poznámka 1 Ne všechny z původní soustavy testů jsou nezávislé, jak je snadno vidět např. ze dvou následujících protipříkladů:

Tvrzení 1. Z axiomu úměrnosti (F7) vyplývá splnění axiomu (silné i slabé) identity (F1).

Ověření: Platí-li v (F7) $p_i(1) = c \cdot p_i(0)$ pro nějakou konstantu $c > 0$, pak konkrétním dosazením této konstanty $c = 1$, dostáváme premisu testu (F1) $p_i(1) = p_i(0)$. Pak ale obecná (pro libovolné $c > 0$) platnost implikace testu (F7) $P_{01} = c$ zde znamená $P_{01} = 1$. Uvedené platí nezávisle na tom, co se děje/neděje s kvantitami.

Tvrzení 2 Z axiomů okružnosti (F4s) a identity (F1) plyne axiom záměny období (F3).

Ověření: Platí-li podle (F4s) $P_{02} = P_{01} \cdot P_{12}$, resp. $P_{01} = \frac{P_{02}}{P_{12}}$ při nenulovosti P_{12} , pak

speciální volbou meziobdobí „2“ situovanou do období „0“ (to je přípustné) dostaneme relaci $P_{01} = \frac{P_{00}}{P_{10}}$, což spolu s platností (F1w) $P_{00} = 1$ dává implikaci v (F3).

Poznámka 2

Soustava původních 8 Fisherových testů (F1)-F(8), tím spíše pak se zahrnutím dalších (F9)-(F12) **není vzájemně konzistentní**. Na neslučitelnost současného splnění testů okružnosti (F4w), určenosti (F5) a souměřitelnosti (F6w) poukázal již **Ragnar Frisch**. Jím podaný důkaz však nebyl dostatečně obecný. O něco později se obdobným problémem zabýval **maďarský statistik Abraham Wald**¹[1937], který našel vzájemný rozpor v trojici testů (F7s), (F4s) a (F2w). Oba autoři přitom předpokládali, že indexní čísla (cenová i kvantová) jsou derivovatelná podle cen p_i i kvantit q_i . Jími podané důkazy však nebyly později shledány za plně korektní.

První plně exaktní důkazy o rozpornosti některých testů podali matematictí ekonomové Ind **Subramanian Swamy** a Japonec **K.Mizutani**¹. Uplatnili přitom poznatky z teorie funkcionálních a parciálních diferenciálních rovnic. O něco později (za slabších předpokladů položených na indexní číslo a bez potřeby diferencovatelnosti indexního konstruktů podle argumentů) provedl zevrubnou analýzu problému Němec **Wolfgang Eichhorn**. Důkazy jím podané jsou ryze analytické a nevyžadují žádné předpoklady ve vztahu k diferencovatelnosti indexního čísla (dle cen resp. kvantit). Na další nekonzistence (případně zahrnující i některé níže uvedené testy) upozornili a příslušné věty vyslovili **P.Samuelson [1974]**, **W.Eichhorn [1976]** a **W.Eichhorn a J.Voeller [1976]**.

Poznámka 3

Není znám (a patrně ani neexistuje) případ, kdy by z jakékoliv konzistentní podsoustavy testů (F1)-F(8) bylo možno přímo vyvodit konkrétní tvar indexního čísla.

W.Eichhorn [1976] ale ukázal, že indexní číslo splňující současně bazický test **(F4w)**, test souměřitelnosti **(F6w)**, popř. ještě test záměny faktorů **(F2w)** musí mít dosti speciální tvar.

Poznámka 4

Pokud jde o **modifikovanou soustavu 20 Diewertových testů (zahrnujících s výjimkou (F2) a (F4) zbývající testy Fisherovy, je odpověď** na první otázku **kladná**, neboť právě **ideální Fisherův index splňuje všech 20 testů**.⁶

2.3 Poznámky k podmínkám splnění některých testů

Účelem **testu (F12)** je - podobně jako u **(F5)** - ošetřit situace, kdy není přítomna některá komodita a zabránit, aby při její nepřítomnosti došlo ke zhroucení hodnoty indexního čísla. Lze ho považovat za určité zpřesnění axiomu určenosti **(F5)**; ten sám o sobě ale nespecifikuje, jak má vypadat výraz při výpadku jedné nebo více komodit.

Požadavku vyžadovanému testem **(F12)** zpravidla nevyhovují indexní čísla založená na geometrickém průměrování.

Testu okružnosti (F4) vyhovuje jen relativně malý počet indexních čísel. Stojí za zmínku, že v r.1979 dokázali **Funke, Hacker a Voeller**, že indexní číslo, které má tento axiom splňovat a současně vyhovuje určitým **podmínkám regularity** zaručujícím, že i z jiných hledisek půjde o „rozumné“ indexní číslo, musí mít tvar vyjádřitelný obecným (váženým) geometrickým průměrem, u kterého budou váhy splňovat podmínky

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \text{a} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Z výše uvedených tedy tento axiom **splňují** pouze **Jevonsův a Törnquistův index**.

⁶ Je ovšem třeba dodat, že, aniž je tím autor podezírán ze záměru, že volba testů je do určité míry podřízena indexu Fischerova typu.

Pokud jde o axiom **(F4)**, ukázalo se, že jeho přesnou platnost lze oželeť, pokud zkoumané indexní číslo vyhovuje tomuto testu aspoň s určitou přibližností. Již **Irving Fisher** v tomto směru shledal, že v praktických situacích, kdy pracujeme s reálnými ekonomickými daty, jsou odchylky u P_{02}^F od součinu $P_{01}^F \cdot P_{12}^F$ obvykle velmi malé. Podobná zkušenost byla získána i u dalších indexních čísel, které zacházejí symetricky s vahami, jako je **Walshovo indexní číslo** P_{01}^W , případně i jiná.

Pouhý počet splněných testů však není jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (**Carli, Jevons**), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž záměr objektivizovat či neutralizovat vliv volby období, která se objevuje v konstrukcích **Fisherova, Edgeworthova, Walshova** a **Törnquistova indexu** staví tato indexní čísla nad "nesymetricky formulovanými" indexy **Paascheho** či **Laspeyresova** typu.

2.4 Rozšíření Fisherovy axiomatické soustavy

Stanovit, které z uvedených 12 testů jsou více "fundamentální" než jiné, není dost dobře možné a názory jednotlivých autorů se v hodnocení dosti liší. Přece však lze vyslovit názor, že **axiomy záměny faktorů (F2) okružnosti (F4)**, případně **(F11)** lze považovat za ty, jejichž nesplnění lze bez větší újmy tolerovat. Pokud jde o „samozřejmý“ požadavek **testu (F8)**, lze říci, že je nutný, ale protože komutativita platí pro aditivní, i pro multiplikační operace (tj. při aritmetickém i při geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciální kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Nejpodrobnější rozvedení axiomaticko-testového přístupu lze nalézt v **Diewertově práci [1992]**, kde autor **dospívá k systému 20 testů**, které člení do 5 následujících skupin :

- **4 „samozřejmé“ testy**, mezi něž patří **spojitost** a **nezápornost** kteréhokoliv indexního čísla ve všech prvcích vektorů $p(0), p(1), q(0), q(1)$, dále **test silné identity** požadující, aby $P_{01} = 1$ vždy, když platí $p(1) = p(0)^7$, a též symetrický požadavek ve vztahu k neměnicím se kvantitám, kde je vyžadováno, aby $P_{01} = \sum p_i(1)q_i / \sum p_i(0)q_i$ vždy, když platí $q(1) = q(0) = q$.
- **4 testy „homogenity“**, mezi které náleží mj. **silnější verze testu úměrnosti (F7)** požadující, aby platilo $P_{01}^* = \lambda \cdot P_{01}$, jestliže v indexním čísle P_{01}^* operujeme s λ – násobkem cenového vektoru $p(1)$, dále obdobný **test inverzní úměrnosti v cenách základního období a dva testy invariance vůči proporčním změnám v kvantitách základního a běžného období** požadující, aby se cenové indexní číslo nezměnilo, jestliže se proporčně změní kvantita v základním resp. v běžném období.
- **5 testů invariance a symetrie** ; Je sem řazen **test symetrie při záměně pořadí komodit (F8)**, dále **test souměřitelnosti (F6)** - zde nazýván *testem invariance vůči změnám měrových jednotek*, dále **test záměny období (F3)** a **dvojice testů** nazvaných **testy záměny cen**, resp. **kvantit** vyjadřující požadavky na neměnnost cenového indexního čísla při prohození kvantit základního a běžného období a stejně tak *vice versa* ve vztahu ke kvantovému indexnímu číslu.
- **3 testy střední hodnoty**; Kromě **(F10)** sem patří též analogický test střední hodnoty formulovaný pro Q_{01} a dále striktní **požadavek na to, aby indexní číslo vždy leželo mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem**, tzn. aby pro cenové platila nerovnost $P_{01}^P \leq P_{01} \leq P_{01}^L$.
- **4 testy monotónnosti**, z nichž jedním je právě **test (F9)**. Další 3 požadavky na monotónnost jsou zde vysloveny nejen ve vztahu ke změně cen v $p(1)$, ale též vůči změnám v $p(0), q(1), q(0)$.

V uvedeném **Diewertově souhrnu 20 testů** ale nejsou zahrnuty zde prezentované **testy určenosti (F5)**, dále **test (F12)**, který je zesílením **(F5)**, ani **axiom okružnosti (F4)**, který autor posuzuje samostatně mimo kontext bilaterálních indexů. Samostatně jako 21. test je uvažován **test záměny faktorů (F2)**.

⁷ Z **testu silné identity (F1s)** plyne **(F1w)**. Obě vlastnosti ale plynou z **(F7)** - viz **C.M. Walsh [1901]**.