1. Klasická indexní čísla

1.1. Průměry jako prostředek formulace indexních čísel

Vůbec první konstrukt, který lze považovat za "indexní číslo" uvedl Francouz Charles de Ferrare Dutot [1738] jako prostý **podíl zprůměrovaných cen komodit v běžném a v základním období, tj. výraz**

$$\frac{\Sigma p_i(1)}{N} \Big/ \frac{\Sigma p_i(0)}{N}$$

O více než století později tři představitelé moderní formalizované ekonomie **Stanley W. Jevons [1865], Francis Y.Edgeworth [1881] a Alfred Marshall [1887] se snažili nalézt objektivní hlediska, jak řešit formulovaný problém rigorózně**, **s použitím** nemnoha tehdy známých **výsledků statistické analýzy**. Několik málo v té době známých konstruktů bylo založeno na prostých nebo vážených průměrech (*aritmetickém či geometrickém*) a úlohou bylo vyšetřit, které vlastnosti přisoudit indexnímu číslo jako nutné a pokusit se zdůvodnit návrhy IČ čísel ve světle chování ekonomické reality.

Byla přitom vyslovena úvaha: **Za normálního stavu by se cenový vývoj ekonomického komplexu měl odehrávat tak, že změna** (obvykle vzestup) **ceny jedné z uvažovaných komodit mezi dvěma obdobími by měl být postupně provázen analogickou změnou** (vzestupem) **cen ostatních komodit**. Tím by mělo dojít (připusťme malé časové zpoždění) k (téměř) proporční změně cen všech uvažovaných komodit mezi těmito obdobími. **Edgeworth a Jevons vyslovili tezi, že nepravidelnosti, které v realitě u** (nestejného) **vývoje cen komodit pozorujeme, jsou způsobeny** (kromě zpoždění) **především chybami v pozorování hodnot** (cen) **příslušného statistického souboru***/.

Tehdy jimi zastávaný názor vycházel z úvahy, že **na vektor podílových změn cen**

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,N$$

lze pohlížet jako na konečnou množinu realizací náhodné veličiny X "všeobecná cenová změna", a že každý konkrétně vyšetřovaný soubor podílových cenových změn $p_i(1)/p_i(0)$ má charakter náhodného výběru, jehož prvky jsou vzájemně nezávislé a stejně (zpravidla symetricky) rozdělené. Přitažlivost tohoto nazírání byla podložena statistickými vývody, neboť skutečně platí, že:

<u>Tvrzení 1</u> **Jsou-li složky náhodného vektoru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ nezávisle a stejně normálně rozděleny $N(\mu;\delta^2)$, pak** nestrannou **odhadovou funkcí střední hodnoty μ** získanou ***metodou maximální věrohodnosti* je aritmetický průměr prvků výběrového souboru $\bar{x}^A = \sum_{i=1}^{N} x_i \Big/ N$.**

<u>Tvrzení 2</u> **jsou-li složky náhodného vektoru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ nezávisle a stejně rozděleny logaritmicko-normálně $LN(\mu,\sigma^2)$, pak nestrannou odhadovou funkcí** (získanou ***metodou maximální věrohodnosti***) **střední hodnoty μ je** prostý **geometrický průměr prvků výběrového souboru $\bar{x}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$** .

ověření Tvrzení 1:

Věrohodnostní funkce N-rozměrného vektoru *nezávislých normálně rozdělených* n.v. má tvar

$$f\left(x;\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N}exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{pro} \quad x\approx N\left(\mu\,;\sigma^2 I_N\right).$$

Logaritmovaná věrohodnostní funkce tohoto rozdělení má tvar

$$\tilde{L}\left(\mu,\sigma^2;x\right)=ln\,L\left(\mu,\sigma^2;x\right)=-\frac{N}{2}.ln(2\pi)-\frac{N}{2}.ln\,\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

Minimalizační podmínka vzhledem k určení nestranného ML-odhadu střední hodnoty μ je

$$\frac{\partial\tilde{L}\left(\mu,\sigma^2;x\right)}{\partial\mu}=\frac{\partial\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right]}{\partial\mu}=-\frac{1}{2\sigma^2}.\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{N}x_i+N\mu^2\right]}{\partial\mu}=0$$

Odtud dostaneme podmínku $-\frac{1}{2\sigma^2}.\left[-2\sum_{i=1}^{N}x_i+2N\mu\right]=0$ a po zřejmé úpravě pak $\tilde{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}$ □ .

ověření Tvrzení 2:

Věrohodnostní funkce N-rozměrného vektoru *nezávislých log-normálně rozdělených* n.v. má tvar

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N\prod_{i=1}^{N}x_i}exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{N}(ln\,x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{pro} \quad x\approx LN\left(\mu\,;\sigma^2 I_N\right)$$

Logaritmovaná věrohodnostní funkce tohoto rozdělení má tvar

$$\tilde{L}\left(\mu,\sigma^2;x\right)=ln\,L\left(\mu,\sigma^2;x\right)=-\frac{N}{2}.ln(2\pi)-\frac{N}{2}.ln\,\sigma^2-\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(ln\,x_i-\mu)^2$$

Minimalizační podmínka pro určení maximálně věrohodného odhadu střední hodnoty μ je

$$\frac{\partial\tilde{L}\left(\mu,\sigma^2;x\right)}{\partial\mu}=\frac{\partial\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(ln\,x_i-\mu)^2\right]}{\partial\mu}=-\frac{1}{2\sigma^2}.\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{N}ln^2\,x_i-2\mu\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i+N\mu^2\right]}{\partial\mu}=0$$

Derivací dostaneme podmínku $-\frac{1}{2\sigma^2}.\left[-2\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i+2N\mu\right]=0$ neboli $-2\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i+2N\mu=0$,

Odtud $N\mu=\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i$ a závěrečnou úpravou $\tilde{\mu}=ln\,\mu^*=\frac{\sum_{i=1}^{N}ln\,x_i}{N}=\frac{ln\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)}{N}=ln\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)^{1/N}$.

Následně $\mu^*=exp\left[ln\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)^{1/N}\right]=\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)^{1/N}$ □ .

V **Edgeworthově pohledu** (též nazývaném ***varianta stochastického standardního přístupu***) **lze zaznamenat snahu po vyjádření přesnosti měření individuálních cenových změn adekvátním váhovým vektorem**. Na druhé straně je však tímto přesnosti měření přikládán význam nesouvisející s tím, jaká je významnost komodity v analyzovaném spotřebním koši (vyjádřená např. objemem její spotřeby).

Přes inspirativnost byl nicméně záhy tento přístup odmítnut pro přílišné znásilnění ekonomické reality ve prospěch uvedeného teoreticko-statistického schématu. **Jak později ukázali A.L.Bowley a J.M.Keynes, odporují tomuto pohledu jak empirické tak teoretické důvody**: **Empirická šetření nedala za pravdu domněnkám o normalitě, příp. logaritmické normalitě ani o symetrii rozdělení cenových poměrů** (až snad na ojedinělé případy). Podobně, **reálné projevy cenového vývoje různých komodit jsou charakteristické tím, že vývoj cen určité skupiny komodit se zpravidla (v krátkém či delším horizontu) systematicky liší od vývoje cen jiné skupiny** (v závislosti např. na substitučních aspektech) a **ke sbližování trendů nemusí dojít ani po velmi dlouhém období**. Zde hraje zřejmou úlohu provázanost cen se spotřebou charakteristická pro prostředí všeobecné ekonomické rovnováhy: **ceny či jejich podíly nejsou v ekonomickém prostředí rozděleny náhodně**.

Edgeworthův přístup udává nicméně základní **motivaci pro** racionální **konstrukci indexního čísla tím, že usiluje o vystižení "střední cenové změny" nějakým** rozumným **průměrováním podílů** $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti průměrování podílů $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$ **, je použití vážených typů průměrů**. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i , které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním vyjádření.

Máme-li např. **čtyři základní typy průměrů** (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický), lze dospět ke čtyřem použitelným agregujícím konstruktům :

A. Indexní čísla založená na aritmetickém průměru:
$$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

B. Indexní čísla založená na geometrickém průměru:
$$P_{01}^{G} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$$

C. Indexní čísla vycházející z harmonického průměru:
$$\frac{1}{P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)$$

D. Indexní čísla založená na kvadratickém průměru:
$$P_{01}^{Q} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^2}$$

Prosté průměry, z nichž se některým též dostalo specifického pojmenování (při operování s podílovými cenovými změnami), dostaneme z vážených volbou rovnoměrných vah tj. při $\alpha_i = 1/N$. Kvadratický průměr se oproti ostatním používá v prostředí indexních čísel řídce.

Pro váhy α_i **budeme předpokládat** standardní omezení spočívající v jejich **nezápornosti** (s ohledem na přijímanou nezápornost kvantit a kladnost cen) a dále **v tom, že jejich součet (uvažovaný přes všech N komodit) je jedničkový**, tzn. požadujeme

$$\alpha_i \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Použitelnými způsoby vyjádření odlišnosti váhového podílu každé komodity na celkovém agregátním komplexu jsou např. volby vah následujících typů:

$$\alpha_i = \frac{q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(*)}$$

Z obecné teorie středních hodnot vyplývá, že pro libovolnou n-tici nezáporných čísel **platí nerovnosti pro vztahy mezi průměry** (prostými i váženými)

$$P_{01}^{\ H} \leq P_{01}^{\ G} \leq P_{01}^{\ A} \leq P_{01}^{\ Q}$$

Všechny tyto průměry lze totiž zapsat jako zvláštní formy obecného výrazu pro střední hodnotu řádu ρ.

Tuto **obecnou střední hodnotu lze** pro průměry prostého typu **vyjádřit výrazem**

$$P^{\rho}{}_{01} = \left(\frac{1}{N} . \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

resp. **pro průměry váženého typu** ji lze zapsat analogicky jako

$$_{\alpha}P^{\rho}{}_{01} = \left(. \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

Aritmetický průměr je zvláštním **případem obecné střední hodnoty při volbě** $\rho = 1$, **kvadratický průměr při volbě** $\rho = 2$, **harmonický průměr obdržíme při dosazení** $\rho = -1$. **Geometrický průměr je limitním případem obecné střední hodnoty řádu** ρ, **pokud se hodnota** ρ **limitně blíží k 0. Vzorce platí jak pro prosté, tak pro vážené průměry, pokud váhy splňují podmínky** $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ – platnost se zachovává i při určitém uvolnění podmínek. Platí totiž tzv. **Schlömilchova nerovnost**[1]

Pro jakékoliv dvě střední hodnoty řádů *r,s* s nerovností řádů, tj. např. *r < s,* platí nerovnost

$$P_{01}^{\ r} < P_{01}^{\ s} \qquad \text{resp.} \qquad {}_{\alpha}P_{01}^{\ r} < {}_{\alpha}P_{01}^{\ s} .$$

Rovnost průměrů nastává tehdy a jen tehdy, pokud jsou všechny podílové cenové změny $p_i(1)/p_i(0)$ **shodné.** (Je-li jediná hodnota rozdílná, platí všude ostré nerovnosti).

---

[1] Relace je pojmenována po německém matematiku **Oskaru Xaveru Schlömilchovi [1823-1901].**

1.2 Klasická (statistická) indexní čísla

Vůbec nejjednodušší případ "rozumného indexního čísla" představuje

1.CARLI/SAUERBECKovo indexní číslo **[Gian-Ricardo Carli 1764, Augustus M.Sauerbeck 1885]**

$$P^S{}_{01} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)} ,$$

které je prostým aritmetickým průměrem podílových cenových změn. Jde o nejjednodušší možný přístup k agregaci podílových změn $p_i(1)/p_i(0)$ **bez možnosti** (průměr je nevážený) **uplatnit jakákoliv hlediska k vyjádření rozdílné významnosti jednotlivých komodit v celkovém agregátním vyjádření.**

Nahradíme-li aritmetické průměrování geometrickým, lze formulovat jednoduchý výraz nazývaný

2. JEVONSovo indexní číslo [William Stanley Jevons 1865]

$$P_{01}^J = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{1}{N}}$$

Tento indexní konstrukt je nazván po anglickém ekonomu Stanley W. Jevonsovi. Tvoří ho prostý geometrický průměr podílových cenových změn. Jak plyne ze Schlömilchovy nerovnosti, Jevonsův index poskytuje vždy nižší (nanejvýš stejnou) **hodnotu než Carliho/Sauerbeckův index – rovnost nastává jen pro netypický případ, kdy by byly všechny podílové cenové změny** $p_i(1)/p_i(0)$ **shodné.** Jinými slovy řečeno **to znamená, že *geometrický průměr "střední hodnotu"* *těchto* *cenových změn podhodnocuje, zatímco aritmetický ji nadhodnocuje.***

Jak Carliho/Sauerbeckovo tak Jevonsovo indexní číslo vykazují určité **slabiny, které je znehodnocují vzhledem k možnosti praktického použití:**

- Nutnost výskytu shodných komodit zařazených do příslušných **spotřebních košů** (to může činit problém v situacích, kdy jsou obě období časově značně vzdálená),

- Vyloučení přítomnosti volných statků (komodit s nulovými cenami) **v základním období, u Jevonsova indexu** – nemá-li být index identicky nulový – **i v běžném období.**

- Nemožnost odlišit různost přínosu cenových podílů různých komodit k hodnotě souhrnného indexu v praktických situacích. (Změna ceny chleba i ceny pepře se v indexu uplatní stejnou vahou navzdory diametrálně odlišné spotřebě obou komodit u všech spotřebitelů). Stejnou slabinou by ostatně trpěl i harmonický či kvadratický průměr.

Přirozeným *způsobem, jak zlepšit vlastnosti prostého průměrování podílů* $p_i(1)/p_i(0)$, ***je** proto **použití vážených typů průměrů.*** **Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah** α_i **, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity** (z hlediska ceny či kvantity) **na celkovém agregátním indexním vyjádření.**

Příkladem indexů "váženého typu" je dvojice indexních čísel: Laspeyresovo a Paascheho, která využívají aritmetický popř. harmonický způsob vážení:

3. *LASPEYRESovo indexní číslo* [Ernst Louis Etienne Laspeyres 1871][2]

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$ tzn. jde o **vážený aritmetický průměr cenových změn**, s vahami $\alpha_i = \dfrac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$.

Je to vidět z následujícího vyjádření

$$_{\alpha}P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} = P_{01}^{L}$$

Laspeyresův index získáme též jako **vážený harmonický průměr**, pokud zvolíme

Váhy $$\beta_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)},$$

neboť zřejmě $$\frac{1}{_{\beta}P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(0)} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(0)} = \frac{1}{P_{01}^{L}}$$

Index uplatnil poprvé v roce 1871 německý ekonom E. Laspeyres k analýze cenových relací *při zbožních výměnách v Německu*. Laspeyresovo indexní číslo je využíváno v české (stejně jako dříve v československé) **statistické praxi,** zejména **k měření vývoje inflace (*CPI - index spotřebitelských cen*, *PPI – index cen průmyslových výrobců*) a indexů životních nákladů** (souhrnně, i u různých sociálních kategorií)**.**

Záměnou cen za kvantity a *vice versa* **získáme**

Laspeyresovo kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo ve tvaru

$$Q_{01}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i(1)\cdot p_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} q_i(0)\cdot p_i(0)},$$

ve kterém se uplatňují opět tři z vektorů, tentokrát $p(0), q(0), q(1)$.

---

[2]Laspeyres,E.L.E.: Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 16, s.296-314.

Vezmeme-li místo spotřeb $q_i(0)$ spotřeby z běžného období $q_i(1)$, dostaneme

4. *PAASCHEho indexní číslo* [Hermann von Paasche 1874][3]

$$P_{01}^{P}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(1)}$$

Jde o obdobu předchozího, avšak váhy γ_i jsou zde dány jako $\gamma_i=\frac{p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(1)}$

Uplatníme-li tyto váhy ve váženém aritmetickém průměru, dostaneme

$$_{\gamma}P_{01}^{A}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(0)q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(0)q_j(1)}\cdot\frac{p_i(1)}{p_i(0)}=\frac{\sum_{j=1}^{N}p_j(1)q_j(1)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(0)q_j(1)}=P_{01}^{P}$$

P_{01}^{P} lze ale vyjádřit i jako vážený **harmonický průměr** s vahami $\delta_i=\frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}$,

jak vidno z následujícího vyjádření

$$\frac{1}{_{\delta}P_{01}^{H}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1).q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(1)q_j(1)}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{-1}=\frac{\sum_{j=1}^{N}p_j(0)q_j(1)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(1)q_j(1)}=\frac{1}{P_{01}^{P}}$$

Index nese pojmenování po německém ekonomu H. von Paaschem, který jej použil *při analýze vývoje cenových kursů na hamburské burze*. Paascheho indexní číslo je (zejména v anglosaské jazykové oblasti a v Japonsku) **dosti často užíváno k charakterizaci vývoje burzovních indexů na kapitálových trzích.**

Záměnou cen za kvantity a *vice versa* získáme Paascheho kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo ve tvaru

$$Q_{01}^{P}=\frac{\sum_{i=1}^{N}q_i(1)\cdot p_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}q_i(0)\cdot p_i(1)}\quad .$$

Poznámka: Údajně **první osobou, která uvedla postupy vedoucí k definicím Paascheho a Laspeyresova indexního čísla byl** (rovněž v roce 1871) **německý matematik/filosof Wilhelm Moritz Drobisch [1802-1896]. Jeho jméno bylo** ale o mnoho později **vztaženo k indexu jiného tvaru.**

---

[3] **Paasche, von H.: Über der Preisentwicklung der Letzte Jahre nach den Hamburger Börsennotirungen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 23, s.168-178.**

Obě tato indexní čísla tvoří určité rozmezí (s dolní hranicí $P_{01}{}^{P}$ a horní hranicí $P_{01}{}^{L}$), **v rámci něhož lze považovat posouzení vývoje poměrů sledovaných veličin** (cen,kvantit) **za realistické. Hodnoty převyšující $P_{01}{}^{L}$ a hodnoty menší než $P_{01}{}^{P}$ za realistické považovat nelze a případný výsledek** (získaný jiným indexním číslem) **je třeba posuzovat již jako zřetelné nadhodnocení, resp. podhodnocení skutečného stavu.**
Nevýhodou obou těchto indexních čísel (kromě jiných teoretických vad) je skutečnost, že **nezacházejí symetricky s informacemi získanými v základním a v běžném období.**
Tuto nevýhodu odstraňují jiná indexní čísla, která váží cenové podíly $p_i(1)/p_i(0)$ **vahami, operujícími s kvantitami** základního nebo běžného období **"neutrálně". Jde o**

5.*MARSHALL-EDGEWORTHovo indexní číslo* **[Alfred Marshall,FrancisY.Edgeworth 1887]**

$$P_{01}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}$$

V něm jsou váženy jednotlivé cenové poměry aritmetickým průměrem kvantit vzatým ze základního a běžného období. Také toto indexní číslo může být interpretováno jako vážený aritmetický průměr s vahami

$$\alpha^{E}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\left[q_j(0)+q_j(1)\right]}$$

6. *WALSHovo indexní číslo* **[Correa Moylan Walsh 1901,1921]**

$$P_{01}^{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}} ,$$

ve kterém jsou s kvantity „neutrálně průměrovány„ geometricky. C.M.Walsh argumentoval pro tento návrh právě potřebou zacházet „symetricky" s informacemi převzatými ze základního a běžného období, nejsou-li jiná vodítka, kterému z těchto období dát přednost. **I jeho index je speciálním případem váženého aritmetického průměru, pokud za váhy α_i vezmeme výrazy**

$$\alpha^{W}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot\sqrt{q_j(0)\cdot q_j(1)}}$$

Ve snaze dospět k "optimálnímu" indexnímu konstruktu, byl uveden návrh známý jako

7. *FISHERovo (ideální) indexní číslo* **[Irving Fisher 1922]** $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L}\cdot P_{01}^{P}}$,

Index je definován jako geometrický průměr Laspeyresova a Paascheova indexu. Je pojmenován po Američanovi Irvingu Fisherovi, ač byl již dříve zmiňován Brity Arthurem Leonem Bowleyem [1899] a Arthurem Cecilem Pigouem [1912].

Z konstrukce tohoto indexního čísla je zřejmé, že *jeho hodnota se musí nacházet mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem.*

Jak se při praktickém uplatnění ukazuje, **hodnoty Fisherova, Edgeworthova a Walshova indexního čísla jsou zpravidla velmi blízké a všechna mohou dobře vyjadřovat "neutrální" hodnocení vývoje** **či územního srovnání stavů posuzovaného komplexu.**

Oproti Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům **operují,** jak patrno, **Walshův, Edgeworthův a Fisherův index s celou čtveřicí vektorů** $p(0), p(1), q(0), q(1),$

1.3 Některá další statistická indexní čísla

Další indexní číslo, kterému se dostalo značné teoretické **pozornosti, je**

8. *TÖRNQUISTovo indexní číslo* **[Leo Törnquist 1936][4]**

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i}$$ **, kde**

$$w_i = 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \right) + 0{,}5 \cdot \left(\frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \right) ,$$

což je vážený geometrický průměr cenových poměrů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$**, v němž jsou váhy** w_i **vytvořeny jako** prosté **aritmetické průměry výdajových účastí** i**-té kvantity** (na peněžním agregátu) **v základním a v běžném období.**

Ke klasickým indexním číslům můžeme přiřadit ještě dva návrhy, které lze vyjádřit jako vážené průměry. Jedná se o

9. *PALGRAVEovo indexní číslo* **[R.H.Inglis Palgrave** kolem **r.1910]**

$$P_{01}^{PL} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(1)]^2 \cdot q_i(1) / p_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)}$$

10. *Harmonický LASPEYRESův index* **[Yrjö Vartia 1976][5]**

$$\frac{1}{P_{01}^{HL}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(0)}{p_i(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(0)]^2 \cdot q_i(0) / p_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}$$

Obě tato indexní čísla se vyznačují tím, že se v jejich konstrukci objevují opět váhy v podobě výdajových účastí („*expenditure shares*") mající

---

[4] Törnquist, L.:The Bank of Finland´s consumption price index. Bank of Finland Monthly Bulletin 10/ 1936.
[5] Vartia Y: Ideal Log-Change Index Numbers. Scandinavian Journal of Statistics 3/1976

u *Palgraveova indexu* tvar $\delta^{PL}{}_i = \dfrac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)}$

u *harmonického Laspeyresova indexu* tvar $\alpha^{HL}{}_i = \dfrac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$

Název *Harmonický Laspeyresův index* v sobě **slučuje typ indexu (*harmonický*) a typ vah (shodný s *Laspeyresovým indexem*).**[6]

Indexní čísla Laspeyresovo, Paascheho a některá další **můžeme zařadit do kategorií *indexů tzv. Löweova typu*. Tato indexní čísla lze vyjádřit ve tvaru**

11. *LÖWEův (cenový) index* **[Joseph Loewe 1823]**

$$P_{01}^{LW} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(*)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(*)}$$

, kde

hvězdičky v závorce vyjadřují situování do nějakého **pevného časového období nebo jde prostě o nějakým způsobem stanovené kvantity (u Edgeworthova či Walshova čísla se vezmou průměry kvantit ze základního a běžného období).** Obvykle se předpokládá, že období vyjádřené hvězdičkou nepředchází základnímu období „*0*“.

Obecnost Löweovy formulace nazývané **přístupem pevného koše [fixed basket approach] přináší s sebou na druhé straně stupeň neurčitosti, máme-li rozhodnout o nejvhodnějším naplnění hvězdiček v závorkách.**

Ještě jednomu obecnému tvaru, jímž je možno řadu klasických indexních čísel zapsat, **se dostalo pozornosti. Jde o indexy vyjádřitelné jako**

„obecná střední hodnota řádu r“ $${}_sP_{01}^{t}(r) = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\cdot\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^r\right)^{1/r}$$ **pro** $r \neq 0$

nebo výrazem $${}_sP_{01}^{t}(0) = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{s_i(t)}$$ **limita pro** $r \to 0$

přičemž váhy $$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(t)q_i(t)}$$

představují výdajové účasti [expenditure shares] i-té komodity na hodnotě celkového **spotřebního koše. Hodnoty výdajových účastí se přebírají** zpravidla **buď ze základního nebo běžného období.**

---

[6] **Podobně se lze setkat i s *geometrickým Laspeyresovým indexem*, což je index typu váženého geometrického průměru, jehož váhy jsou právě** α_i (shodné s Laspeyresovými)**, případně též s *geometrickým Paascheho indexem,* jehož váhy jsou** δ_i (shodně s vahami „harmonické interpretace“ Paascheho indexu).

Z uvedených indexních čísel lze za speciální případy *obecné střední hodnoty s vahami* *charakteru* *výdajových účastí* vyjádřit

Laspeyresovo cenové indexní číslo $P^{L}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(0) \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^{0}{}_{01}(1)$

Paascheho cenové indexní číslo $P^{P}{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(1) \dfrac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^{1}{}_{01}(-1)$

Palgraveův cenový index $P^{PL}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(1) \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^{1}{}_{01}(1)$

Harmonický Laspeyresův index $P^{P}{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(0) \dfrac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^{0}{}_{01}(-1)$

Törnquistův cenový index $P^{T}_{01} = \prod_{i=1}^{N} \left(\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{0,5.s_i(0)+0,5.s_i(1)} =_s P^{0+1}{}_{01}(0)$

Fisherovo cenové indexní číslo může být zapsáno jako

$$P^{F}{}_{01} = (P^{0}{}_{01}(1))^{1/2} (P^{1}{}_{01}(-1))^{1/2}$$

Podobně bychom mohli nejrůznější volbou vah a průměrů různých typů dospět k mnoha dalším tvarům, které by dohromady vytvořily početný soubor více nebo méně užitečných typů **souhrnných indexů. Většina nahodile konstruovaných výrazů ovšem nepřesvědčila z hlediska svých vlastností, popř. i podmínek praktického užití, takže se do teoretického povědomí dostaly jen málokteré z nich.**

Předchozí soubor cenových (případné kvantových) **indexů je už sám o sobě dost početný, aby nás postavil před otázku, volba jakého typu cenového nebo kvantového indexu je** pro daný případ nebo obecně **optimální?**

Jak rozlišit mezi vhodností a použitelností mnoha možných návrhů navzájem? Přitom musíme mít na zřeteli, že vedle čistě matematických vlastností je ještě důležitější posuzovat index z hlediska účelu zasazení do ekonomického prostředí.

Otázka vhodnosti určitého indexu pro konkrétní použití je nicméně vždy **arbitrární.**

Na konci 19. a v průběhu celého 20.století bylo věnováno značné úsilí, jak formulovat soubor kritérií, podložených zdůvodněnými teoretickými požadavky, které do určité míry dovolují posoudit "kvalitu" toho-kterého návrhu tvaru konkrétního indexního čísla, byť - jak dále uvidíme - nelze aspirovat na stanovení "všestranně nejlepšího" indexního čísla.

Zmiňme ještě dva jednoduché indexy, se kterými se lze setkat v aktuální literatuře a které svou konstrukcí nevybočují z konceptu statistických indexních čísel. Jde o

12. *Bowley-Sidgwick-Drobischův* *cenový* *index* [A.L.Bowley,H. Sidgwick[7],W.M.Drobisch]

daný jako *aritmetický průměr Laspeyresova a Paascheho cenového indexu*, tedy

$$P_{01}^{BSD} = \frac{1}{2}\left(P_{01}^{L} + P_{01}^{P}\right) \qquad \text{a}$$

13. *Carruthers-Sellwood-Ward-Dalénův cenový index*[8] [1980] definovaný jako

prostý ***geometrický průměr*** *prostých* ***aritmetického a harmonického průměru***

$$P_{01}^{CSWD} = \sqrt{P_{01}^{A} \cdot P_{01}^{H}} \ .$$

Z konstrukcí obou těchto indexů bezprostředně vyplývá, že platí nerovnosti

$$P_{01}^{P} \le P_{01}^{F} \le P_{01}^{BSD} \le P_{01}^{L}$$ [9]

(*Fisherův index* vykazuje tedy vždy – byť v reálných situacích často jen nepatrně – nižší hodnotu než *BSD-index)*

a rovněž $$P_{01}^{H} \le P_{01}^{CSWD} \le P_{01}^{A} \ .$$

(V důsledku platnosti *Schlömilchovy nerovnosti* je horní mez intervalu pro P_{01}^{CSWD} **větší než dolní*)*.**

---

[7] **Henry Sidgwick [1938-1900] byl významný britský filosof a politický ekonom** (názorově blízký Johnu Stuartu Millovi), **mj. zakladatel a první prezident *Society for Psychical Research.***

[8] **Carruthers, A.G., Sellwood D.J., Ward P.W. [1980]: „Recent Developments in the Retail Prices Index“. The Statistician 29/1980 p.1-32.**

[9] **Okolnost, že Laspeyresův index poskytuje** za běžných ekonomických okolností **vyšší hodnotu než Paascheho index, ukážeme v následujícím. Platnost tvrzení vyplývá z von Bortkiewiczovy relace.**