## Giniho formulace indexních čísel

Rozšířením techniky řetězení je postup, který pod názvem ***síťová metoda*** uplatnil italský matematik a ekonom **Carrado Gini**[1]. Opět se uvažuje **rozčlenění období mezi počátečním - „0“-*tým* - a koncovým - „m“-*tým* - obdobím na** celkem ***m*** **úseků**, v nichž jsou dostupné potřebné statistické údaje o cenách a spotřebách.

**C. Gini** formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINIho indexní číslo 1. typu**

**(G1)**
$$P_{0m}^{G(1)} = \sqrt[m+1]{\prod_{j=0}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(m)\cdot q_i(j)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(j)}} ,$$

tzv. **GINIho indexní číslo 2. typu**[2]

**(G2)**
$$P_{0m}^{G(2)} = \sqrt[m-1]{\prod_{j=1}^{m-1} P_{0j}^{*} \cdot P_{jm}^{*}} ,$$

přičemž ve druhém případě může symbol $P_{0m}^{G(2)}$ představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice $P_{0m}^{G(2)}$ tedy není jednoznačná).

**Giniho konstrukty (G1), (G2) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit.** Určitou jejich slabinou je však okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočet indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (nebo individua či jiné statistické jednotky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy hlavně za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

Předností obou indexních čísel **(G1)**, **(G2)** je automatické splnění axiomu záměny období **(F3)** a dále skutečnost, že při velkém **m** (počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty vzaté přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „$0$“ a „$m$“).

**poznámka ke (G1):**

Všimněme si, že v případě **(G1)** (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "$0$" a koncovém "$m$" období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích $1,2,\ldots,m-1$.

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu **(G1)**, **volbou** $m=1$ **dostáváme pro** $P_{01}^{G(1)}$ přímo **Fisherův cenový index**, zatímco pro $m=2$ v případě $P_{02}^{G(2)}$ obdržíme obdobně prostý geometrický průměr obou částí $P_{01}$ a $P_{02}$ generujícího cenového indexního čísla.

---

[1] **Gini, C.: „On the Circular Test of Index Numbers“. Metron 1931.**

[2] **Ragnar Frisch nazývá tyto konstrukty *Gini' s aggregate crossing*, resp. *Gini´s two-point crossing*.**

Není obtížné ukázat, že **Giniho indexní čísla vyhovují Fisherovým postulátům (F1), (F3), (F5), (F6), (F7), (F8)** (v případě $P_{0m}^{G(2)}$ je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

## Stuvelova indexní čísla

Postup navržený v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik **Gerhard Stuvel** se vrací ke klasickým přístupům z počátku století. Vyložíme jeho základní myšlenku[3]:

1) Hledá se dvojice indexních čísel (cenové $P_{01}^{St}$, kvantové $Q_{01}^{St}$) přímo splňující axiom záměny faktorů **(F2)**, tj. s požadavkem platnosti

**(S1)**
$$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \, .$$

**poznámka 1**

Ke zkrácení zápisu užijeme úspornější označení výrazu na pravé straně jako $\frac{M(1)}{M(0)}$, přičemž peněžní výdaje $M(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)$, resp. $M(0) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)$, vyjadřují výdaje na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.[4]

2) Druhou podmínkou, kterou má hledaná dvojice splňovat, je diferenční relace, která poměřuje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly $P_{01}^{St}$, $Q_{01}^{St}$ a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:

**(S2)**
$$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} \cong P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \, .$$

Ve vztahu **(S2)** uvažoval autor dva možné případy ve specifikaci relace "$\cong$":

**(S2A): relace (S2) platí přesně, tj. "$\cong$" vezmeme jako rovnost,**
**(S2B): relace (S2) platí s určitou,** přesně specifikovanou **odchylkou.**

**poznámka 2**

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly $P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L}$, ale i $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{P}$ od hodnoty $M(1)/M(0)$ nejsou nijak velké. Jak víme, přesně tento požadavek nesplňuje Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují" křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^{L} Q_{01}^{P} = P_{01}^{P} Q_{01}^{L} = \frac{M(1)}{M(0)} \, .$$

Postup zaslouží komentář ještě z tohoto důvodu:

**V okruhu původních 8 Fisherových testů není známo, že by nějaká podskupina testů vedla** deduktivně jednoznačně **ke konstrukci určitého typu indexu.** Stuvelova cesta, resp. formulace podmínky **(S2)** spolu s přijetím podmínky **(S1)** k takovému jednoznačnému určení vede (stačí právě tyto dvě podmínky, abychom konkrétní indexní konstrukt, jak uvidíme, obdrželi).

---

[3] **Stuvel, G. : A New Index Number Formula. *Econometrica 1957*, Vol. 25.**

## Původní Stuvelův návrh

Z povahy úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé $P_{01}^{St}$ a $Q_{01}^{St}$ )

**(S1)** $$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad ,$$

**(S2A)** $$Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} \quad .$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuvelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (jedné lineární, druhé kvadratické) s neznámými $P_{01}^{St}$ a $Q_{01}^{St}$ , které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj. $M(1), M(0), P_{01}^{L}, Q_{01}^{L}$.

K nalezení řešení užijeme např. substituci z **(S2A)** $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L}$, která po dosazení do **(S1)** dává kvadratickou rovnici s neznámou $P_{01}^{St}$ :

$$\left(P_{01}^{St}\right)^2 - \left(P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}\right) \cdot P_{01}^{St} - \frac{M(1)}{M(0)} = 0 \quad .$$

Následně vypočteme symetrický vztah pro $Q_{01}^{St}$ .

Řešení získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

**(St1)** $$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad ,$$

**(St2)** $$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad .$$

**Poznámka 3** Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Výrazy v odmocninách **(St1)** a **(St1)** jsou větší než výrazy před odmocninami.)

Výrazy **(St1)** a **(St1)** můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství $p(0), p(1), q(0), q(1)$ - obě indexní čísla obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}^{St} = \frac{\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2}{4} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0)\right)^2 + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali cenový index

$$P_{01}^{St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{\left(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1)\right)^2 + 4.\left(\sum p_i(1)q_i(1)\right)\left(\sum p_i(0)q_i(0)\right)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

## Modifikovaný Stuvelův návrh

Analogicky předchozímu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé $P_{01}^{St*}$, $Q_{01}^{St*}$)

**(S1)** $$P_{01}^{St*} \cdot Q_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)} ,$$

**(S2B)** $$Q_{01}^{St*} - Q_{01}^{L} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + \Delta ,$$

kde odchylka $\Delta$ má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako ***„míra nesplnění“ axiomu (F2) Laspeyresovými indexními čísly***):

**(S2B)** $$\Delta = P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)} .$$

Obdobným způsobem jako dříve řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět.substituci $Q_{01}^{St*} = P_{01}^{St*} - P_{01}^{St*} - P_{01}^{L} + Q_{01}^{L} + \Delta$. Po dosazení $Q_{01}^{St*}$ z **(S2B)** do **(S1)** máme

$$\left(P_{01}^{St*}\right)^{2} - \left( P_{01}^{L} - Q_{01}^{L} - P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L} + \frac{M(1)}{M(0)} \right) \cdot P_{01}^{St*} = \frac{M(1)}{M(0)}$$

a stejně jako dříve odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

**(St3)** $$P_{01}^{St*} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}\left(1 + P_{01}^{L}\right) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left( \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}\left(1 + P_{01}^{L}\right) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2} \right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

**(St4)** $$Q_{01}^{St*} = \frac{Q_{01}^{L}\left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left( \frac{Q_{01}^{L}\left(1 + P_{01}^{L}\right) - P_{01}^{L} - \frac{M(1)}{M(0)}}{2} \right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

Obě nalezená indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně i objemového komoditního indexu. Opět jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice.

**poznámka 4** Jak je patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách **(A)** resp. **(B1-B2)** uvažovali vztahy k jiným než k **Laspeyresovým indexním** číslům (např. k **Paascheho** či k **Edgeworthovým**).

## Ověření Fisherových axiomů u Stuvelových čísel

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá **dvojice Stuvelových indexních čísel (S1), (S2)** testům **Irvinga Fishera**:

**Test identity (F1) je zřejmě splněn**, neboť pro obě Laspeyresova indexní čísla platí, že $P_{00}^{\ L}=1$, $Q_{00}^{\ L}=1$ a výrazy pro $P_{00}^{\ St}$, $Q_{00}^{\ St}$ se tedy redukují na odmocninu z podílu $\frac{M(1)}{M(0)}$, která je při ztotožnění obou období rovna 1:

$$P_{00}^{St}=\frac{P_{00}^{L}-Q_{00}^{L}}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q_{00}^{L}-P_{00}^{L}}{2}\right)^{2}+\frac{M(0)}{M(0)}}=\frac{1-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-1}{2}\right)^{2}+1}=\sqrt{1}=1\ .$$

**Platnost (F2) je zřejmá**, neboť jde přímo o definiční podmínku **(S1)**, z níž je dvojice hledaných indexů odvozována.

**Axiom (F3) je u dvojice Stuvelových indexních čísel (St1), (St2) splněn**. Zmiňuje to mj. sám autor. Naše **ověření** je následující: Vyžaduje se platnost vztahu

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{P_{01}^{L}-Q_{01}^{L}}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L}-P_{01}^{L}}{2}\right)^{2}+\frac{M(1)}{M(0)}}\right)\left(\frac{P_{10}^{L}-Q_{10}^{L}}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q_{10}^{L}-P_{10}^{L}}{2}\right)^{2}+\frac{M(0)}{M(1)}}\right)=1$$

Pro přehlednost zápisu označíme čtveřici skalárních součinů přítomných výše jako

$$A=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0),\quad B=\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(0),\quad C=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(1)\quad D=\sum_{i=1}^{n}p_i(1)q_i(1)$$

V této zkrácené symbolice můžeme psát

$$P_{01}^{\ L}=\frac{B}{A},\quad Q_{01}^{\ L}=\frac{C}{A},\quad P_{10}^{\ L}=\frac{C}{D},\quad Q_{10}^{\ L}=\frac{B}{D},\quad \frac{M(1)}{M(0)}=\frac{D}{A},\quad \frac{M(0)}{M(1)}=\frac{A}{D}$$

Potom máme
$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}\right)^{2}+\frac{D}{A}}\right).\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}\right)^{2}+\frac{A}{D}}\right)$$

Po úpravách
$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{B-C}{2A}+\sqrt{\left(\frac{B-C}{2A}\right)^{2}+\frac{D}{A}}\right).\left(\frac{C-B}{2D}+\sqrt{\left(\frac{C-B}{2D}\right)^{2}+\frac{A}{D}}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{2A}\left(B-C+\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}\right).\frac{1}{2D}\left(C-B+\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left((B-C)(C-B)+(C-B).\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}+\sqrt{(B-C)^{2}.(C-B)^{2}+16AD+(C-B)^{2}4AD+(B-C)^{2}.4AD}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^{2}+(C-B).\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}+\sqrt{\left(4AD+(B-C)^{2}\right)^{2}}\right)$$

Střední dva členy v závorce se navzájem zruší, čtvrtý je odmocnina z kvadrátu, máme tedy

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^2 + 4AD + (B-C)^2\right) = \frac{4AD}{4AD} = 1 \qquad \square\,.$$

**Okružnost (F4) není Stuvelovými indexními čísly (St1), (St2) splněna**, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky.

Naproti tomu axiomy určenosti **(F5)** a souměřitelnosti **(F6)** platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v jejich definici, přičemž též výraz v odmocnině **(St1)** je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda $P_{01}^{St} = Q_{01}^{St}$). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici **(St1)**.

**Pokud jde o axiom proporcionality (F7), je také splněn:**

Vezměme **(St2)**

$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

Za podmínek $p_i(1) = c.p_i(0)$ pro všechna i, pro konstantu $c$ dostáváme:

$$\frac{P_{01}^{L*} - Q_{01}^{L*}}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{\sum p_i^*(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum q_i(1)p_i(0)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right) = \frac{1}{2}.\left(c - \frac{\sum q_i(1)p_i(0)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right)$$

$$\left(\frac{P_{01}^{L*} - Q_{01}^{L*}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)} = \frac{1}{4}.\left(c - \frac{\sum q_i(1)p_i(0)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right)^2 + \frac{\sum p_i^*(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} =$$

$$= \frac{1}{4}.\left(c^2 - 2c.\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} + \left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2\right) + c\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} =$$

$$= \frac{1}{4}.\left(c^2 + 2c.\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} + \left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(c + \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right)^2.$$

Odtud tedy máme pro odmocninový výraz:

$$\sqrt{\left(\frac{P_{01}^{L*} - Q_{01}^{L*}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} = \frac{1}{2}\left(c + \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right)$$

a tedy

$$P_{01}^{St*} = \frac{1}{2}\left(c - \frac{\sum q_i(1)p_i(0)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right) + \frac{1}{2}\left(c + \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum q_i(0)p_i(0)}\right) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

Platnost **(F8)** je zřejmá.

**(F9) monotónnost:** Znamená to ověřit platnost implikace: Jestliže platí $p_i(1) \le p_i^*(1)$ pro všechna i, potom vždy platí $P_{01} \le P_{01}^*$.

**(St2)**

$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^{L} - Q_{01}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}\ .$$

Vyšetříme tedy chování jednotlivých výrazů vystupujících v **(St2)**: Protože změna cen běžného období se nijak nedotkne Laspeyresova množstevního indexu: $Q_{01}{}^{L} = Q*_{01}{}^{L}$, vyšetříme chování $P_{01}{}^{L}$ a podílu $M(1)/M(0)$. V prvém případě za předpokladu premisy implikace platí $P_{01}{}^{L} \le P*_{01}{}^{L}$, ve druhém podobně $\frac{M(1)}{M(0)} \le \frac{M*(1)}{M(0)}$, protože jmenovatele obou výrazů nedoznají žádných změn a v čitatelích ve skalárních součinech vystupují jen nezáporné veličiny. Zbývá tak vyšetřit chování členu pod odmocninou:

$$\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)}{2\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}\right)^2$$ , jehož čitatel bude změnou dotčen:

$$\left(\frac{Q^{*L}_{01} - P_{01}^{L}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^{N} p_i^{*}(1)q_i(0)}{2\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}\right)^2 .$$

Vzhledem k totožnosti obou jmenovatelů vyšetřujeme, zda

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(p_i(0)q_i(1) - p_i(1)q_i(0))\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{N}\left(p_i(0)q_i(1) - p_i^{*}(1)q_i(0)\right)\right)^2$$

Pokud předpokládáme podmínku $p_i(1) \le p_i^{*}(1)$, pak je zřejmé, že odečítané výrazy v závorkách napravo jsou větší, než ty nalevo.

Zbývá tedy vyšetřit, zda platí

$$\sum_{i=1}^{N}(p_i(0)q_i(1))^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i(1)q_i(0) + \left(p_i(1)q_i(0)^2\right) \le$$
$$\sum_{i=1}^{N}(p_i(0)q_i(1))^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i^{*}(1)q_i(0) + \left(p_i(1)^{*}q_i(0)^2\right).$$

Protože první člen je shodný na obou stranách a třetí na pravé straně je nejméně roven třetímu členu nalevo, zbývá vyšetřit, zda, resp. za jakých podmínek platí

$$\sum_{i=1}^{N} -2p_i(0)q_i(1)p_i(1)q_i(0) \le \sum_{i=1}^{N} -2p_i(0)q_i(1)p_i^{*}(1)q_i(0)$$ tj. $-2.\sum_{i=1}^{N} r_i p_i(1) \le -2.\sum_{i=1}^{N} r_i p_i^{*}(1)$.

To ale neplatí nikdy, protože při nezáporných $r_i$ a $p_i(1) \le p_i^{*}(1)$ bude pravá strana více záporná než levá. ***Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.***

**(F10)** Ověření **testu střední hodnoty** $\underset{I=1,\dots,N}{Min}\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01} \le \underset{I=1,\dots,N}{Max}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ bude obtížné:

Vyjádříme nejprve některé členy v **(St2)** následovně:

podíl $M(1)/M(0)$.: $\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \sum_{i=1}^{N} w_i.\frac{p_i(1)}{p_i(0)}.\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$, kde $w_i = \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}$

rozdíl
$$\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0) - \sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1)}{2\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{N} w_i.\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{N} w_i.\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$
$$= \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{N} w_i.\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right).$$

$$\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)} = \left(\frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{N} w_i.\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i.\frac{p_i(1)}{p_i(0)}.\frac{q_i(1)}{q_i(0)} =$$

*Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.*

**(St2)**
$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}\ .$$

**(F11) Test invariance vůči změnám v měřítkách splněn není.**

Vyšetříme postupně, jak odolné jsou vůči uvažovaným změnám $p^*(0) = d.p(0)$ **a** $p^*(1) = d.p(1)$, $q^*(0) = b.q(0)$ **a** $q^*(1) = c.q(1)$ jednotlivé fragmenty vystupující v indexním čísle **(St1)** $Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$ ,

$$\tilde{Q}_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)cq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(0)} = \frac{c}{b}.Q_{01}^L \qquad \tilde{P}_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(1)\tilde{q}_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(0)} = P_{01}^L$$

$$\frac{\tilde{M}(1)}{\tilde{M}(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(1)\tilde{q}_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(1)cq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(0)} = \frac{c}{b}.\frac{M(1)}{M(0)}$$

Dohromady tedy máme

$$\tilde{Q}_{01}^L - \tilde{P}_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(1)\tilde{q}_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(0)\tilde{q}_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)cq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} dp_i(1)bq_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} dp_i(0)bq_i(0)} =$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)cq_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)bq_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)bq_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)bq_i(0)} = \frac{c.\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1) - b.\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)bq_i(0)} = \frac{c}{b}.Q_{01}^L - P_{01}^L$$

$$\tilde{Q}_{01}^{St} = \frac{\tilde{Q}_{01}^L - \tilde{P}_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{Q}_{01}^L - \tilde{P}_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{\tilde{M}(1)}{\tilde{M}(0)}} = \frac{\frac{c}{b}.Q_{01}{}^L - P_{01}{}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{c}{b}.Q_{01}{}^L - P_{01}{}^L}{2}\right)^2 + \frac{c}{b}.\frac{\tilde{M}(1)}{\tilde{M}(0)}}$$

$$\widetilde{Q}_{01}^{St} = \frac{c.Q_{01}{}^{L} - b.P_{01}{}^{L}}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c.Q_{01}{}^{L} - b.P_{01}{}^{L}}{2}\right)^{2} + \frac{c}{b}.\frac{\widetilde{M}(1)}{\widetilde{M}(0)}}$$

, z čehož plyne, že pro obecný případ požadovanou shodu $P_{01}{}^{L} = \widetilde{P}_{01}{}^{L}$ **nedostaneme**. **Test (F11)** tedy **neplatí.**

**Test (F12) je splněn**, protože při neomezeně ubývající poslední (jinak ale libovolné) komoditě jsou limitními hodnotami všech fragmentů, z nichž sestává **(St2)**, výrazy analogické výchozím, pouze spočtené z $N-1$ zbývajících komodit.

$$\lim_{N \to 0} P_{01}^{St(N)} = \frac{P_{01}^{L(N-1)} - Q_{01}^{L(N-1)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L(N-1)} - P_{01}^{L(N-1)}}{2}\right)^{2} + \frac{M(1)^{(N-1)}}{M(0)^{(N-1)}}} = \lim P_{01}^{St(N-1)}$$

.