## Walshův postup

**Correa Moylan Walsh** navrhl postup, kterým lze jakékoliv "klasické" indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů **(F2).** Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla $P_{01}^*$, $Q_{01}^*$ zavedli příslušné ***"Walshovy modifikace"*** $P_{01}^{*W}$, $Q_{01}^{*W}$ takto:

**(1)** $$P_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{P_{01}^*}{Q_{01}^*} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

**(2)** $$Q_{01}^{*W} = \sqrt{\frac{Q_{01}^*}{P_{01}^*} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

**Ilustrace: Laspeyresovo indexní číslo** Vytvořme Walshovy modifikace $P_{01}^{LW}$ a $Q_{01}^{LW}$ výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a vykrácení $\Sigma p_i(0) \cdot q_i(0)$ dostaneme

**(3)** $$P_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{P_{01}^L \cdot P_{01}^P} = P_{01}^F$$

a podobně pro kvantové $Q_{01}^{LW}$

**(4)** $$Q_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{Q_{01}^L \cdot Q_{01}^P} = Q_{01}^F$$

Dostaneme dvojici **Fisherových indexních čísel** $P_{01}^F$, $Q_{01}^F$. Lze se přesvědčit, že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí dvojici **Paascheho indexní čísla** $P_{01}^P$, $Q_{01}^P$ .

**Poznámka 1** K dosažení platnosti testu **(F2)** bychom nemuseli operovat s podílem $P_{01}*/Q_{01}*$, nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}} \qquad Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

zaručující splnění **(F2)** se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění jiných testů. Pro příklad lze uvést test proporčnosti **(F7)**, kde požadujeme, aby platilo $P_{01}^{cAB} = c,$ avšak obecně

$$.P_{01}^{cAB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum c.p_i(0)\, q_i(1)}{\sum .p_i(0)\, q_i(0)}} = \sqrt{c}.\sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum .p_i(0)\, q_i(1)}{\sum .p_i(0)\, q_i(0)}}$$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě $\sqrt{c}$ .
U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$P_{01}^{cW} = \sqrt{\frac{c.}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} c.p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = c.\sqrt{\frac{1}{Q_{01}^{*}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} .p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

pokud $P*_{01}$ vyhovuje testu **(F7)**, což např. platí pro $P^{L}{}_{01}$ nebo $P^{P}{}_{01}$, přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být vysoká. Pokud za $Q*_{01}$ vezmeme $Q^{L}{}_{01}$, pak rovnost platí přesně.

## von Bortkiewiczova relace

Pruský matematik a ekonom ***Ladislaus Josefovicz von Bortkiewicz*** odvodil užitečnou **strukturální relaci mezi** ***Laspeyresovým*** a ***Paascheho indexním číslem***, která může napomoci vzájemnému porovnání jejich číselných hodnot:

**(11)**

$$B = \frac{P_{01}^{P}}{P_{01}^{L}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}} = 1 + \frac{S_{\frac{p1}{p0}}}{E_{\frac{p1}{p0}}}\cdot\frac{S_{\frac{q1}{q0}}}{E_{\frac{q1}{q0}}}\cdot r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$$

V ní přítomné symboly mají následující význam:

**1)** $E_{\frac{p1}{p0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami tvaru $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$. $E_{\frac{p1}{p0}}$ je tedy ***Laspeyresův cenový index*** $P_{01}^{L}$ .

**2)** $E_{\frac{q1}{q0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ s týmiž vahami, tzn. tento výraz je ***Laspeyresovým kvantovým indexním číslem*** $Q_{01}^{L}$.

**3)** $s_{\frac{p1}{p0}}$ označuje výběrovou ***směrodatnou odchylku cenových***

***poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami $w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$ :

$$s_{\frac{p1}{p0}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - P_{01}^{\ L}\right)^2}$$

**4)** $s_{\frac{q1}{q0}}$ vyjadřuje ***směrodatnou odchylku změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ se stejnými vahami, tj.

$$s_{\frac{q1}{q0}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} - Q_{01}^{\ L}\right)^2}$$

**5)** Výraz $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ značí ***vážený párový korelační koeficient*** mezi poměrově vyjádřenými cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno: $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}} = \frac{cov\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right)}{s_{\frac{p1}{p0}}\cdot s_{\frac{q1}{q0}}}$, přičemž *výraz pro* ***váženou kovarianci*** v čitateli zlomku je

**(12)**
$$cov\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)} \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - E_{\frac{p1}{p0}}\right)\cdot\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)} - E_{\frac{q1}{q0}}\right)$$

**Poznámka 2** *Podíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty je* variační koeficient, takže dva výrazy v součinu pro B jsou variačními koeficienty $V_{\frac{p1}{p2}}, V_{\frac{q1}{q2}}$. Oba jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit vždy nezáporné.

## Ověření platnosti Bortkiewiczova poměru[1]

vyvodíme ze vztahů užívaných v popisné statistice. Výchozím vztahem je relace

**(13)**
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right) + \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})\right]$$

$$\overline{xy} = \bar{x}\cdot\bar{y} + cov(x,y)$$

která je obdobou výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl $var\, x = \overline{x^2} - \bar{x}^2$.

**ověření (1)** Rozvedením vztahu pro kovarianci dvou vektorů dostaneme

[1] **Původní odvození pochází z příspěvku: Bortkiewicz,L., von.: Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. Nordisk Statistisk Tidskrift I [1922] a 3 [1924].**

$$\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})\right]=\frac{1}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{N}y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{N}x_i+N\bar{x}\bar{y}\right]=$$
$$=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\right)-\bar{x}\cdot\bar{y}-\bar{y}\cdot\bar{x}+\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{1}{N}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot y_i\right)-\bar{x}\cdot\bar{y}$$

následně převedením $\bar{x}\cdot\bar{y}$ na opačnou stranu získáme hledanou relaci. .

Analogicky odvodíme platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky:

**(14)** $$\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i=\left(\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)+\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)$$

kde $w_i,\ i=1,2,\dots\dots,n$ jsou nezáporné váhy normované jedničkovým součtem: $\sum w_i=1$.

**ověření (14):** Rozvedením vztahu pro *váženou kovarianci* dvou vektorů dostaneme

$$\left[\sum_{i=1}^{n}w_i\left(x_i-\bar{x}^w\right)\cdot\left(y_i-\bar{y}^w\right)\right]=\left[\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i-\bar{x}^w\sum_{i=1}^{N}w_iy_i-\bar{y}^w\sum_{i=1}^{N}w_ix_i+N\bar{x}^w\bar{y}^w\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i-\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w-\bar{y}^w\cdot\bar{x}^w+\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w=\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i-\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w$$ ,

kde

jsme použili značení

$$\bar{x}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i\cdot x_i\ ,\quad \bar{y}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i\cdot y_i\ ,\quad cov^w(x,y)=\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\cdot\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)$$

V této notaci můžeme výraz **(14)** zapsat ve tvaru

**(14a)** $$\overline{xy^w}=\overline{x^w}\cdot\overline{y^w}+cov^w(x,y)$$

Identitu **(14a)** dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem $\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w$. Dostaneme

**(15)** $$\frac{\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}=\frac{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}+\frac{cov^w(x,y)}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}=1+\frac{cov^w(x,y)}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}$$

a druhý výraz pravé strany doplníme vložením směrodatných odchylek. Tím získáme vyjádření s variačními koeficienty veličin $x_i$ a $y_i$ a s jejich korelačním koeficientem $r_{xy}$ .

**(15a)** $$\frac{\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}=1+\frac{cov^w(x,y)}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}.\frac{s_x{}^w.s_y{}^w}{s_x{}^w.s_y{}^w}=1+\frac{s_x{}^w.s_y{}^w}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w}.r_{xy}{}^w$$ , kde

máme

$$\bar{x}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i, \quad \bar{y}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i, \quad s_x{}^w = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \bar{x}^w\right)^2}$$

$$s_y{}^w = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i \left(y_i - \bar{y}^w\right)^2}, \qquad cov^w(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(x_i - \bar{x}^w\right)\left(y_i - \bar{y}^w\right)$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$. Sledovaného cíle dosáhneme, ukážeme-li, že levá strana výrazu, může přejít vhodnou konkretizací veličin $x_i, y_i$ a $w_i, i=1,2,\ldots,n$ ve **výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla**.

Vyjádřeme tedy nejdříve podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla jako:

**(16)**
$$\frac{P_{01}^P}{P_{01}^L} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

Na základě předchozího a tvaru pravé strany **Bortkiewiczova poměru** vyšetříme, zda tento podíl zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem **(15)**, jehož levá strana by měla podobu váženého skalárního součinu vektorů $\bar{x}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i, \bar{y}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i$ děleného součinem stejným způsobem vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že takovéto **vyjádření je možné**, a to při následující volbě vektorových veličin $x_i = \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$, $y_i = \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}$ a vah

$$w_i^* = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}.$$

(Tyto konkretizace pro $x_i$ a $y_i$ lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně též zaměnit.) Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do **(15)**, dostaneme **(17)**

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}\right]\cdot\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\cdot\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}\right]}=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}}{\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\right]\cdot\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}\right]}$$

což po dalším vykrácení skalárním součinem $\Sigma p_i(0)\cdot q_i(0)$ zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla. .

Záměnou cen za kvantity a opačně (prohozením $y_i = \dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$, $x_i = \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}$ při ponechání vah $w_i^* = \dfrac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$ bychom dospěli tímto způsobem analogicky k vyjádření

**(18)** $$\frac{Q_{01}{}^{P}}{Q_{01}{}^{L}} = 1 + \frac{s_x{}^{w}.s_y{}^{w}}{\bar{x}^{w}\cdot\bar{y}^{w}}.r_{xy}{}^{w}$$

(tzn. s prohozením obsahu $x_i$ a $y_i$ ) ,
z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti $P_{01}^{P}\cdot Q_{01}^{L} = P_{01}^{L}\cdot Q_{01}^{P}$ .

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že **"neutrální hodnota" 1 von Bortkiewiczova podílu nastane v případech**, kdy :

***(1) všechny ceny se změní ve stejném poměru***, *tj.* $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)} = c$ *pro všechny komodity*.
Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

**(2)** ***všechny kvantity se změní ve stejném poměru*** *tj .* $\dfrac{q_i(1)}{q_i(0)} = d$ *pro všechny statky.*
Tato eventualita je při užití reálných hodnot stejně vzácná jako předchozí případ.

**(3)** ***vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované***.

Tento případ zasazený do obvyklého ekonomického prostředí znamená situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách, které se odehrály mezi základním a běžným obdobím.

**V**e všech **situacích (1)**, **(2)**, **(3)** tedy **dojde ke shodě** hodnot $P_{01}^{L}$ a $P_{01}^{P}$.

Podobné úvahy nás přivedou k těmto závěrům:

**Má-li být hodnota** $P_{01}^{P}$ **větší než** $P_{01}^{L}$, musí být (při nezápornosti ostatních prvků dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ kladná, tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat kladná korelace**.

**Má-li být** $P_{01}^{P}$ **menší než** $P_{01}^{L}$, musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}}$ záporná , tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní**.

To odpovídá situaci, kdy **nadprůměrný růst cen některých komodit** (*oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit*) **provází zpravidla podprůměrný růst** (popř. pokles) **poptávky po těchto komoditách**. *Právě tato situace je v ekonomické realitě obvyklá*. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (*v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit*) lze konstatovat, že $P_{01}^{L}$ index bude poskytovat vyšší hodnotu než $P_{01}^{P}$, protože “nadprůměrně” vysokým cenovým pohybům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají “podprůměrné” růsty či poklesy v poptávaných množstvích. Dále je zřejmé, že jak **Marshallovo-Edgeworthovo**, tak **Fisherovo** i **Walshovo** indexní číslo budou ležet v intervalu vymezeného zdola $P_{01}^{P}$ a shora $P_{01}^{L}$.