

## Řetězení indexních čísel - Marshallův podnět [1887]<sup>1</sup>

U mnoha jinak „kvalitních“ indexních čísel činí **problém nesplnění axiomu okružnosti (F4)**. To platí mj. pro všechna klasická indexní čísla založená na aritmetickém nebo harmonickém průměrování. Způsob, jak této slabině částečně ulehčit, nabízí postup nazývaný **řetězení [chaining]**.

**Řetězení** spočívá v postupném zjemňování dělení mezi dvěma stavy (např. stavem „0“ a stavem „1“) a v následném vyjádření jisté „atomizované“ formy k původnímu indexnímu číslu tak, že se nejprve spočtou „parciální“ indexní čísla mezi jednotlivými body tohoto dělení a tato se poté vzájemně vynásobí. Název tomuto postupu však přisoudil nikoliv **Alfred Marshall**, ale až **Irving Fisher**.

Vyčíslíme nejprve hodnotu  $P_{st}$  pro jakékoliv dva body (období) z přijatého dělení intervalu základního období „0“ a běžného období označeného „T“, kde toto druhé období odpovídá symbolu „1“ v původním (neděleném) označování. (Při této dočasné úpravě notace je možné zachovat vzestupnou tendenci v označování dělicích bodů přirozenými čísly). Platí tedy:  $0 \leq s < t \leq T$ .

Definujme nyní **zřetězené indexní číslo** (příslušné nějakému prostému IČ)  $P_{st}^*$  výrazem

$$(1) \quad P_{st}^* = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s}},$$

resp. při  $s < t$  (a následném částečném vykrácení zlomku výše) zjednodušeněji jako

$$(1A) \quad P_{st}^* = P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot P_{s+2,s+3} \cdot \dots \cdot P_{t-1,t}.$$

Buďme si vědomi toho, že jeho hodnota je obecně odlišná od prostého indexního čísla  $P_{st}$ .

Podílovou odchylku  $D_{st} = \frac{P_{st}^*}{P_{st}}$  mezi zřetězeným a prostým indexním číslem

nazveme **zkreslením při zřetězení**.

Lze ukázat, že **postupným zjemňováním dělení mezi body „1“ a „T“ volbou stále více vnitřních dělicích bodů (teoreticky při  $T \rightarrow \infty$ ) lze postupně zmenšovat hodnotu tohoto zkreslení a přibližovat tak zřetězené indexní číslo výchozímu indexnímu číslu**.

**Poznámka 1** Je patrné, že řetězit má smysl především indexní čísla při časovém srovnání (pozorování musí být seřazena v časových posloupnostech), postupu nelze tedy srovnatelně smysluplně využít pro geografická data.

**Poznámka 2** Hlavní bariérou, na kterou zjemňování dělicího intervalu naráží, je přirozená okolnost, že **statistická data jsou registrována vždy pouze v určitých pevně stanovených časových okamžicích**. Podnikové i makroekonomické ukazatele bývají

<sup>1</sup> Marshall A.: Remedies for fluctuations of prices. *Contemporary Review* 1887.

vykazovány zpravidla v měsíčních nebo čtvrtletních intervalech. Častější vykazování hodnot lze zaznamenat pouze u burzovních indexů (vyhodnocujících cenu akciového portfolia), kde změny probíhají během hodinových či dokonce pětiminutových intervalů a údajů z oblasti měnových kursů, kde jsou dostupná denní, příp. i hodinová data. V jiných oblastech reálné ekonomiky je srovnatelná frekvence sledovanosti dat nedosažitelná.

Zřetězené indexní číslo vykazuje naopak dvě teoretické přednosti: splňuje totiž **Fisherovy axiomy okružnosti (F4) a záměny období (F3)**, a to i tehdy, když původní indexní číslo těmto testům nevyhovuje. Ukážeme to snadno:

**Ověření (F3):** Zvolíme např.  $s < t$ . Potom platí

$$(2) \quad P_{st}^* \cdot P_{ts}^* = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \dots \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s}} \cdot \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot \dots \cdot P_{t-1,t}} = 1$$

a podobně při porovnání hodnot ve třech bodech (např.  $r < s < t$ ) snadno ukážeme, že platí **axiom okružnosti (F4)**

$$(3) \quad P_{rt}^* = P_{r,r+1} \cdot P_{r+1,r+2} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s} \cdot P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot \dots \cdot P_{t-1,t} = P_{rs}^* \cdot P_{st}^* \quad \square.$$

**Poznámka 3** Je zřejmé, že pokud prosté indexní číslo splňuje axiom okružnosti (F4), pak je hodnotou shodné s jemu příslušným zřetězeným indexním číslem (při jakémkoliv dělení), tzn.  $P_{st}^* = P_{st}$ .

Podobně snadno ověříme pro zřetězená indexní čísla platnost testů (F1) a (F7)<sup>2</sup>:

$$(4) \text{ (F1)} \quad P_{ss}^* = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot P_{s-1,s}} = 1,$$

$$(5) \text{ (F7)} \quad P_{st}^{C*} = \frac{c \cdot P_{01} \cdot c \cdot P_{12} \cdot c \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot c \cdot P_{t-1,t}}{c \cdot P_{01} \cdot c \cdot P_{12} \cdot c \cdot P_{23} \cdot \dots \cdot c \cdot P_{s-1,s}} = c^{t-s} P_{st}^*.$$

(Pro případ  $t = s + 1$  tedy zřejmě dostaneme  $P_{s,s+1}^{C*} = c \cdot P_{ss}^*$ ). □.

Vyšetřování dalších vlastností zřetězených indexních čísel nemusí být jednoduché, resp. tyto vlastnosti budou zpravidla záviset na vlastnostech výchozích prostých indexních čísel.

Otázku, zda preferovat užití indexního čísla prostého (tj. s pevným základem) nebo zřetězeného, nelze obecně zodpovědět. V souvislosti s konstatováním učiněným v souvislosti s testem (F4) lze přijmout názor, že pokud pracujeme s indexními čísly, která zacházejí symetricky s vahami (což platí mj. u  $P_{01}^W, P_{01}^F, P_{01}^E, P_{01}^T$ ), nezáleží příliš na tom, kterou verzi použijeme, protože při praktickém použití se výsledky budou lišit jen málo.

<sup>2</sup> Konkrétní podobu testů musíme formulovat v kontextu obecných období  $s, t$  v  $m+1$ -bodovém úseku.

Pokud statistická metodika obměňuje základ pro výpočet cenových indexů zhruba po 5 - 8 letech a používá uvedené typy indexních čísel, nebude příliš záležet na tom, zda vezmeme index prostý nebo zřetězený. **Ve statistické praxi však přetrvává tendence setrvávat na indexech s vahami „nesymetrickými“, což platí o Laspeyresovu i o Paascheho indexu.**

Přirozeně je však nutno přihlížet k dalším okolnostem, jako je *délka užívaných časových řad*, resp. časové odstupy, ve kterých se srovnání provádí, a míře *variability u cen i kvantit mezi jednotlivými obdobími*. Lze-li předpokládat zhruba monotónní vývoj (optimální je pozvolný růst cen i kvantit, nezbytné je vyloučení extrémního kolísání a silných kompenzačních efektů, pokud se tyto odehrají ve srovnávaných obdobích), pak mohou být rozdíly také u „nesymetrických“ indexních čísel téměř neznamenné. Čím zřetelněji bude pozorována značná rozkolísanost, tím bude nesoulad mezi oběma typy indexů pravděpodobnější.

**Poznámka 4 von Bortkiewiczův vztah** lze u některých indexních čísel využít ke zjištění, jakým směrem jsou tato indexní čísla vychýlena při zřetězení, tzn. zda dochází k nějaké systematické odchylce (pouze však u IČ nesplňujících **test okružnosti (F4)**) při srovnání hodnot prostého a zřetězeného indexního čísla.

## Zřetězení Carliho/Sauerbeckova indexního čísla

Nejprve vyjádříme u tohoto indexního čísla příslušné zkreslení při zřetězení. To má tvar

$$(6) \quad D_{012}^S = \frac{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right) \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(2)}{p_i(1)} \right)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(2)}{p_i(0)}}$$

Nyní využijeme již dříve uvedeného vztahu

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i = \bar{x} \bar{y} + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

v níž uplatníme následující konkretizace vektorů  $x$  a  $y$ . Pro sledovaný účel vezmeme

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad \text{a podobně} \quad y_i = \frac{p_i(2)}{p_i(1)}$$

neboli podíly cenových poměrů komodit vzatých ve dvou po sobě jdoucích úsecích.

Výraz (6) tak přejde do tvaru

$$(7) \quad \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{p_i(2)}{p_i(1)} \right) = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right) \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(2)}{p_i(1)} \right) + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

s tím, že na levé straně po zkrácení uvnitř sumace dostaneme  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i(2)}{p_i(0)}$ . Nyní

vydělíme výraz pro  $D_{012}^S$  prvním členem pravé strany (7), což je vlastně součin  $\bar{x} \cdot \bar{y}$ . Po úpravě dostaneme

$$(8) \quad D_{012}^S = \frac{1}{1 + \frac{(s_x \cdot s_y \cdot r_{xy})}{\bar{x} \cdot \bar{y}}},$$

kde příslušné průměry, směrodatné odchylky a korelační koeficient se vztahují (prostým, neváženým způsobem) k výše definovaným hodnotám  $x_i$  a  $y_i$ .

S ohledem na dosažené hodnoty  $x_i$  a  $y_i$  můžeme říci, že výraz ve jmenovateli (8) bude menší než 1, neboť znaménko výrazu  $\frac{(s_x \cdot s_y \cdot r_{xy})}{\bar{x} \cdot \bar{y}}$  závisí jedině na znaménku  $r_{xy}$ . Toto

znaménko bude v převážné většině situací záporné, neboť lze důvodně předpokládat, že ve dvou po sobě jdoucích obdobích (0→1) a (1→2) - nebudou-li časové odstupy příliš krátké - bude vzestup cen u komodit s podprůměrným růstem v prvním z těchto období následován (s ohledem na tendenci vedoucí k přibližování cenových úrovní) převážně nadprůměrným růstem v navazujícím období. Výraz pro  $D_{012}^S$  bude proto zpravidla větší než 1 a Sauerbeckovo indexní číslo bude tedy zkresleno směrem nahoru.

### Zřetězení Laspeyresova indexního čísla

Obdobně jako v předešlém případě se pokusíme vyjádřit zkreslení indexního čísla  $D_{012}^L$  výrazem vyskytující se na pravé straně **von Bortkiewiczova poměru**. Po zkrácení máme

$$(10) \quad D_{012}^L = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}} .$$

Nyní nalezneme vhodnou náplň vektorů  $x$  a  $y$  a pro váhy  $w_i$ , pro kterou by platila relace

$$(11) \quad \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\bar{x}_w \cdot \bar{y}_w} = 1 + \frac{s_{xw} \cdot s_{yw} \cdot r_{x,y}}{\bar{x}_w \cdot \bar{y}_w} \quad \text{při použitím značení}$$

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^N w_i x_i, \quad \bar{y}_w = \sum_{i=1}^N w_i y_i, \quad s_{xw} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}_w)^2}, \quad s_{yw} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i (y_i - \bar{y}_w)^2},$$

a

$$cov_w(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}_w) \cdot (y_i - \bar{y}_w)$$

a takovou, při níž by levá strana (11) byla vyjádřitelná jako výraz pro zkreslení  $D_{012}^L$ .

Ukazuje se, že tomuto účelu vyhovují dosazení

$$(12A) \quad x_i = \frac{p_i(2)}{p_i(1)} \quad \text{a podobně vymezení} \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$

(resp. vice versa) a volba vah  $w_i$  ve tvaru

$$(12B) \quad \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)} .$$

Při uvedené konkretizaci dostaneme totiž

$$(13)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N w_i y_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(2) \cdot q_i(1)}{p_i(1) \cdot q_i(0)}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)}$$

a po následném zkrácení uvnitř sumací a následně dvou ze tří přítomných výrazů  $\sum p_i(1) \cdot q_i(0)$  dospějeme k výrazu rovnému právě  $D_{012}^L$  :

$$(13a) \quad \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N w_i y_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(2) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i(2) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)}\right)}$$

(Je vidět, že po zkrácení odpovídá pravá strana výrazu (13a) pravé straně (10).)  $\square$

Také v tomto případě lze na základě přítomných výrazů provést jisté úvahy o očekávaném směru zkreslení. Opět je zřejmé, že směr zkreslení bude záviset na znaménku korelačního koeficientu  $r_{xy}$  mezi vektory  $x$  a  $y$  výše definovanými.

Protože každé  $x_i$  vyjadřuje pro příslušnou komoditu cenovou změnu mezi obdobími 1 a 2, potom lze důvodně předpokládat, že **korelace cenových vektorů mezi obdobími 0→1 a 1→2 bude záporná**. Na druhé straně lze přinejmenším stejně oprávněně vyslovit tvrzení, že **korelace v témže období (0→1) mezi cenovými a množstevními změnami bude rovněž záporná**. Odtud lze tedy dovést, že **cenové změny za období 1→2 budou se změnami kvantit v období 0→1 převážně korelovány kladně**.

Z těchto úvah plyne, že **Laspeyresovo indexní číslo bude (shodně jako Sauerbeckovo) při zřetězení vychýleno směrem nahoru**.

**Poznámka 5** S ohledem na skutečnost, že průměrování provádíme s pomocí vah  $w_i$ , které mohou více nebo méně pozměnit vliv jednotlivých složek v agregátních součtech, platí výše uvedené vývody pouze s určitou podmíněností.

## Zřetězení Paascheho indexního čísla

Obdobnými úvahami o vztazích mezi cenovými a kvantovými změnami v navazujících obdobích bychom dospěli k závěru, že **Paascheho indexní číslo se při zřetězení chová tak, že se jeho zřetězená verze vychyluje hodnoty oproti přímo určenému číslu směrem dolů**. Lze to prokázat touto konkrétní volbou vektorů  $x, y$  a vah  $w$ :

$$(14) \quad x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)}, \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(2)}, \quad w_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)}.$$

Vyšetřujeme korelaci poměrových cenových změn v období  $0 \rightarrow 1$  s poměrovými změnami spotřeb během období  $1 \rightarrow 2$  vzaty v časově obráceném pořadí.

Při zkoumání převažujícího směru korelovanosti obou vektorů lze usuzovat takto:

- **cenové změny uskutečněné během období  $0 \rightarrow 1$  budou negativně korelovány s cenovými změnami v navazujícím období  $1 \rightarrow 2$ . Tyto následné cenové změny budou opět negativně korelovány s množstevními změnami během téhož období  $1 \rightarrow 2$  (shodná úvaha jako při určení směru zkreslení u Laspeyresova indexního čísla).** Vzhledem k tomu, že však tentokrát uvažujeme vektor  $y_i$  s inverzně zadanými

složkami oproti předchozímu případu, bude korelace veličin  $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$  a  $\frac{q_i(1)}{q_i(2)}$  záporná.

**ověření:** Porovnáme výsledek výše uvedeného dosazení (14) s výrazem pro  $D_{012}^P$ :

Při uvedené konkretizaci obsahu trojice vektorů  $x_i, y_i, w_i$  dostaneme

$$(15) \quad \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^N w_i x_i \right) \left( \sum_{i=1}^N w_i y_i \right)} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(0) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)}}{\left( \sum_{i=1}^N \frac{p_i(0) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{p_i(0) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)} \right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)}}{\left( \sum_{i=1}^N \frac{p_i(1) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(2)} \cdot \frac{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)},$$

kde jsme v posledním kroku zkrátili dva ze tří přítomných výrazů  $\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(2)$ .

Poslední výraz zapsaný v (15) je shodný s definičním výrazem pro zkreslení  $D_{012}^P$  po zkrácení dvou skalárních součinů  $\sum p_i(2) \cdot q_i(2)$  vyskytujících se v definičním vzorci pro

$$D_{012}^P = \frac{P_{01}^P \cdot P_{12}^P}{P_{02}^P} :$$

$$(16) \quad D_{012}^P = \frac{P_{01}^P P_{12}^P}{P_{02}^P} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(2)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(2)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(2) \cdot q_i(2)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(2)}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}}{\frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(2)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(2)}} \quad \square .$$

U komplikovanějších indexních čísel nelze směr tranzitivního zkreslení nijak snadno odvodit nebo o něm nelze vůbec vyslovit konkrétní a o ekonomické úvahy o možných vztazích mezi cenami s množstvími v obdobích 0, 1, 2 opřený závěr.