

Zobecnění Koňusových kvantových indexních čísel.

Základní poznatky přinesli v tomto směru R.G.D.Allen, P.Samuelson, R.Pollak, S.Swamy a E.Diewert. Některé navržené konstrukty nesou příslušná autorská pojmenování: **Pollakův**, **Malmquistův** a **Allenův kvantový** (též **množstevní** nebo **objemový**) **index**. Koňusova kvantová indexní čísla definovaná v (5.5) a (5.6) jsou vesměs jejich speciálními příklady nebo jsou použita v konstrukci těchto složitějších indexů.

Nejprve uvedeme Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index, jehož obsahem je podíl objemu výdajů běžného a základního období a Koňusova cenového indexního čísla

Definice 5.5

Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index [Pollak 1971] je definován jako

$$(5.39) \quad Q_{01}^{PK}(\mathbf{q}^*(t)) = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)} = \frac{M(1,1)}{M(0,0)} = \frac{E(u(\mathbf{q}(1)); p(1))}{E(u(\mathbf{q}^*(t)); p(1))} = \frac{M^*(1,t)}{M^*(0,t)} = \frac{E(u(\mathbf{q}(0)); p(0))}{E(u(\mathbf{q}^*(t)); p(0))} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i^*(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i^*(t)},$$

V poslední z těchto definičních forem je užita notace s výdajovou funkcí $E(u(\mathbf{q}(t)), p(t))$. Označení "t" v argumentech cenového a množstevního vektoru zastupuje příslušnost k období, v němž jsou měřeny ceny či kvantity; toto období však nemusí být nutně jen základní nebo běžné. Je patrné, že definice $Q_{01}^{PK}(\mathbf{q}^*(t))$ závisí na referenčním vektoru \mathbf{q}^* , který se v ní vyskytuje. Zavedení Pollakova-Koňusova kvantového indexu vychází z analogie z jednokomoditního případu, kdy je možné psát objemový index pomocí cenového jako

$$(5.40A) \quad {}^{(1)}\tilde{Q}_{01}(1) = \frac{\frac{p(1) \cdot q(1)}{p(1)}}{\frac{p(0) \cdot q(0)}{p(0)}}$$

Pro obecnou N – komoditní situaci tak obdobně dostaneme

$$(5.40B) \quad {}^{(N)}\tilde{Q}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(1)q_i(1)}{p_i(0)q_i(0)}}{{}^{(N)}\tilde{P}_{01}},$$

přičemž jednoznačnost bude dána až po konkrétní volbě cenového indexu ${}^{(N)}\tilde{P}_{01}$.

Konkretizujeme-li volbu období t v cenovém indexu ${}^{(N)}\tilde{P}_{01}$ tak, že vezmeme základní, resp. běžné období, získáme – pro případ cen $\mathbf{p}(0)$ - Koňusův-Paascheho kvantový index

$$Q_{01}^{KP} = \frac{E(u(\mathbf{q}(1), \mathbf{p}(1)))}{E(u(\mathbf{q}^*(1), \mathbf{p}(0)))} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)}$$

- pro případ vzetí $\mathbf{p}(1)$ dostaneme Koňusův-Laspeyresův kvantový index

$$Q_{01}^{KL} = \frac{E(u(\mathbf{q}^*(0), \mathbf{p}(1)))}{E(u(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)))} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)}$$

Oba tyto indexy však mohou být zobecněny i jiným způsobem, než je Pollakův návrh.

K formulaci dalšího zobecnujícího indexu, Malmquistova kvantového indexu, je nutné zavést pojem *distanční* (někdy též *deflační*) funkce¹. *Deflační* funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\mathbf{q})$ a k danému (*referenčnímu*) komoditnímu vektoru \mathbf{q} je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor \mathbf{q} , aby hodnota $u(\mathbf{q})$ spadla přesně na indifferenční křivku odpovídající hladině užitku 0u . Vyslovme definici

Definice 5.6 Distanční (deflační) funkce [R.W.Shephard 1953/1971]

Mějme pevně danu hladinu užitku 0u a (přímou) užitkovou funkci $u(\mathbf{q})$, v níž jsou hodnoty komoditního vektoru $\mathbf{q}(t)$ získány v čase t . Pak definujeme

(5.41)

$$D({}^0u, \mathbf{q}(t)) \equiv \text{Max}_k \left\{ k ; u(\mathbf{q}(t)/k) \geq {}^0u ; k > 0 \right\}$$

¹ Pojem distanční funkce zavedl (v kontextu dalších pojmů teorie produkce) R.W.Shephard v Theory of Cost and Production Functions 1953/1970.

Deflační funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\mathbf{q})$ a danému (referenčnímu) komoditnímu vektoru \mathbf{q} je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor \mathbf{q} , aby spadl přesně na indifferenční křivku odpovídající hladině užitku $u(\mathbf{q})$.

Poznámka 5.3 Hodnota distanční funkce, jak patrně z definice (5.41) informuje o tom, zda je uvažovaný komoditní vektor $\mathbf{q}(t)$ zapotřebí proporcionálně zvětšit – při $k < 1$ – nebo naopak je ho možno proporcionálně zmenšit – při $k > 1$, abychom s ním dosáhli právě velikost užitku 0u . V případě neutrální (jedničkové) hodnoty distanční funkce je tento vektor právě tak „postačující“ k získání hladiny užitku 0u . To ovšem neznamená, že by byly všechny statky využity právě v minimálních nutných množstvích (jde o proporční změnu $\mathbf{q}(t)$).

Hodnoty distanční funkce tedy leží v rozmezí $(0, +\infty)$, přičemž hodnoty $D(^0u, \mathbf{q}(t))$ větší než 1 znamenají, že komodity jsou nasazeny ve „zbytečně velkých množstvích“, zatímco hodnoty menší než 1 indikují „nedostatečná“ množství statků pro dosažení požadované úrovně 0u . V takto zavedeném kontextu je pak

Definice 5.7

Malmquistův kvantový (objemový) index [S. Malmquist 1953] definován jako

$$(5.42) \quad Q_{01}^M(\mathbf{q}) = \frac{D(u(\mathbf{q}); \mathbf{q}(1))}{D(u(\mathbf{q}); \mathbf{q}(0))},$$

kde $D(u, \mathbf{q}(t)) \equiv \text{Max}_k \{k; u(\mathbf{q}(t)/k) \geq u; k > 0\}$ je deflační/distanční funkce, která odpovídá užitkové funkci $u(\mathbf{q})$. Znamená to tedy, že

Výraz $D(u(\mathbf{q}); \mathbf{q}(1))$ znamená nejvyšší hodnotu k , kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\mathbf{q}(1)$, aby se dostal na hranici **užitkové množiny vstupů** $L(u(\mathbf{q})) = \{z, u(z) \geq u(\mathbf{q})\}$ ² odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\mathbf{q}(1)$,

Výraz $D(u(\mathbf{q}); \mathbf{q}(0))$ znamená nejvyšší hodnotu k , kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\mathbf{q}(0)$, aby spadl na hranici **užitkové množiny vstupů** $L(u(\mathbf{q})) = \{z, u(z) \geq u(\mathbf{q})\}$ odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\mathbf{q}(0)$.

² V angličtině jde o „*utility input set*“ jako obdoby „*production input set*“ v produkčním kontextu.

Malmquistův index je definován jako podíl obou těchto hodnot. Jeho nevýhodou je tedy, podobně jako u jiných funkcionálních indexních čísel, závislost na nepozorovatelné užitkové funkci $u(\mathbf{q})$. Diewert v [6] ukázal, že také pro tento kvantový index je možné odvodit dolní a horní hranici podobně jako pro Koňusova indexní čísla a že tento objemový index splňuje podmínky obdobné testu střední hodnoty (F10) formulovaného pro množstevní indexní čísla. Platí totiž nerovnosti³

$$(5.43) \quad \min_i \left\{ \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right\} \leq Q_{01}^M(\mathbf{q}) \leq \max_i \left\{ \frac{q_i(1)}{q_i(0)} \right\}$$

Předpoklad o výdajově minimalizujícím chování spotřebitele není nezbytný ani k definici samotného Malmquistova kvantového indexu ani k zajištění platnosti omezení (5.43). Abychom však mohli dále stanovit hranice těsněji vymezuující hodnoty Malmquistova kvantového indexu, potřebujeme již předpokládat, že spotřebitel minimalizuje své výdaje ve vztahu k dosahovanému užitku a současně musíme doplnit předpoklad o tom, že vektor $\mathbf{q}(t)$ (jinak určený obecným obdobím t) musí být buď $\mathbf{q}(0)$ nebo $\mathbf{q}(1)$. Za těchto podmínek platí:

$$(5.44) \quad Q_{01}^M(\mathbf{q}(1)) \geq \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}^P \quad \text{a také} \quad Q_{01}^M(\mathbf{q}(0)) \leq \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} = Q_{01}^L$$

tzn. hodnota kvantového Malmquistova indexu je zdola omezená Paascheho a shora Laspeyresovým množstevním indexem. Diewert rovněž ukázal, že platí-li hypotéza o výdajově minimalizačním chování spotřebitele, existuje $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $Q_{01}^M[\lambda \cdot \mathbf{q}(0) + (1-\lambda) \cdot \mathbf{q}(1)]$ leží mezi P_{01}^P a P_{01}^L . Tím je řečeno, že Paascheho, resp. Laspeyresovo kvantové indexní číslo vymezuují Malmquistův index do intervalu pro nějakou indifferenční hladinu indexovanou množstevním vektorem, který je váženým průměrem s vahami λ a $1-\lambda$ dvou pozorovatelných vektorů $\mathbf{q}(0)$ resp. $\mathbf{q}(1)$.

Definice 5.8

Allenův kvantový (objemový) index [Allen 1949] je definován v kontextu přímé užitkové funkce $u(\mathbf{q})$ a k ní příslušné výdajové funkce $E(u(\mathbf{q}^*), \mathbf{p}(t))$ jako

$$(5.45) \quad Q_{01}^A = \frac{E(u(\tilde{\mathbf{q}}(1)); \mathbf{p}(t))}{E(u(\tilde{\mathbf{q}}(0)); \mathbf{p}(t))},$$

³ Jde o obdobnou nerovnost – vyjádřenou pro *poměry množství* – jako je podmínka testu střední hodnoty (F10).

kde $E(u(\tilde{\mathbf{q}}(1)), \mathbf{p}(1))$ je výdajová funkce odpovídající užitkové funkci s komoditními množstvími $\tilde{q}_1(1), \tilde{q}_2(1), \dots, \tilde{q}_N(1)$ a podobně $E(u(\tilde{\mathbf{q}}(0)), \mathbf{p}(0))$ je hodnota výdajové funkce příslušná k užitkové funkci s komoditami v množstvích $\tilde{q}_1(0), \tilde{q}_2(0), \dots, \tilde{q}_N(0)$ ⁴. Index je tedy definován jako podíl dvou výdajových funkcí, z nichž v jedné se uplatňují množství statků nakoupená v běžném období, ve druhé množství statků nakoupená v základním období. Vše uvažujeme v situacích, kdy se spotřebitel změnami nákupů přizpůsobuje cenovým změnám.

Definice Allenova indexu je tedy spojena s trojicí vektorů $\tilde{\mathbf{q}}(0), \tilde{\mathbf{q}}(1), \mathbf{p}(t)$, přičemž určení cenového vektoru $\mathbf{p}(t)$ není blíže specifikováno.

Poznámka 5.4 Jestliže do Allenova kvantového indexu (5.45) dosadíme za cenový vektor $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)$, obdržíme Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo Q_{01}^{KP} ; podobně jestliže vezmeme $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(1)$, obdržíme Koňusův-Laspeyresův kvantový index. Q_{01}^{KL} .

Je totiž bezprostředně vidět, že po těchto dosazeních budeme mít

$$(5.46A) \quad Q_{01}^A(\mathbf{p}(0)) = \frac{E(u(\mathbf{q}^*(1), \mathbf{p}(0)))}{E(u(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)))} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(0) \cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^n p_i(0) \cdot q_i(0)} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = Q_{01}^{KL},$$

a analogicky

$$(5.46B) \quad Q_{01}^A(\mathbf{p}(1)) = \frac{E(u(\mathbf{q}(1), \mathbf{p}(1)))}{E(u(\mathbf{q}^*(0), \mathbf{p}(1)))} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^n p_i(1) \cdot q_i^*(0)} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = Q_{01}^{KP},$$

„Neutrální“ hodnota Allenova indexu (5.45) je zřejmě 1 – bude jí dosaženo právě tehdy, jestliže oba množstevní vektory $\tilde{\mathbf{q}}(0), \tilde{\mathbf{q}}(1)$ poskytnou stejný užitek. Za této situace a vzhledem k ryzí monotónnosti přímé užitkové funkce i výdajové funkce v užítku 0u ⁵ bude platit $E(u(\tilde{\mathbf{q}}(1); \mathbf{p}) = E(u(\tilde{\mathbf{q}}(0); \mathbf{p}))$. Jestliže $E(u(\tilde{\mathbf{q}}(1); \mathbf{p}) > E(u(\tilde{\mathbf{q}}(0); \mathbf{p}))$, pak je dle (5.45)

⁴ V případě, že se ceny změní z $\mathbf{p}(0)$ na $\mathbf{p}(1)$, dosazujeme $\tilde{\mathbf{q}}(1) = \mathbf{q}^*(1), \tilde{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}(0)$, v opačném případě – při změně cen z $\mathbf{p}(1)$ na $\mathbf{p}(0)$ - dosazujeme $\tilde{\mathbf{q}}(1) = \mathbf{q}(1), \tilde{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}^*(0)$,

⁵ Výdajová funkce je rostoucí v užítku, tzn. pro $^0u < ^1u$ platí $E(^0u; \mathbf{p}) < E(^1u; \mathbf{p})$

hodnota Allenova indexu větší než 1, naopak při $E(u(\tilde{q}(1); \mathbf{p}) < E(u(\tilde{q}(0); \mathbf{p}))$ dává tento index hodnotu menší než 1. Hodnota Allenova indexu tak přímo indikuje, zda je komoditní kombinace $\tilde{q}(0)$ více či méně „užitkovatelná“ než komoditní kombinace $\tilde{q}(1)$.

Za zmínku dále stojí, že Allenův kvantový index splňuje „kvantový protějšek“ testu záměny faktorů (F3), tj. platí pro něj vztah

$$(5.47) \quad Q_{01}^A(\mathbf{p}(t)) \cdot Q_{10}^A(\mathbf{p}(t)) = 1, \quad t = 0, 1.$$

Z (5.46A-B), jakož i z obou dříve uvedených Koňusových nerovností vyslovených pro kvantová indexní čísla (5.9) a (5.10), dále plyne, že

$$(5.48A) \quad Q_{01}^A(\mathbf{p}(0)) = Q^{KL} \leq \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)} = Q_{01}^L$$

a podobně

$$(5.48B) \quad Q_{01}^A(\mathbf{p}(1)) = Q^{KP} \geq \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}^P$$

Také pro Allenův kvantový index (při dosazeních $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$, resp. $\mathbf{p} = \mathbf{p}(1)$) tedy existují hranice omezující jeho hodnotu zdola a shora. Toto zjištění má svůj význam, neboť hodnota Q_{01}^A (jinak nepozorovatelné veličiny závisící na volbě užitkové funkce $u(\mathbf{q})$) je takto aspoň jednostranně omezena (z pozorování určitelnými) hodnotami, které na tvaru užitkové funkce nezávisí.

Diewert [1981] s využitím dřívějších výsledků Pollaka [1971] a Samuelsona-Swamyho [1974] dále ukázal, že jestliže je užitková funkce *neoklasická*⁶, pak pro všechny *kladné vektory cen a kladné vektory kvantit* platí vztahy

$$(4.49) \quad Q_{01}^P \leq Q_{01}^A(\mathbf{p}(t)) = Q_{01}^{PK}(\mathbf{q}(t)) = \frac{u(1)}{u(0)} \leq Q_{01}^L$$

⁶ O užitkové funkci řekneme, že je *neoklasická*, jestliže je *kladná, spojitá a lineárně homogenní*.

Jestliže je užitková funkce *neoklasická*, pak se *Allenův kvantový index* rovná (pro všechny cenové referenční vektory $\mathbf{p}(t)$) *Pollakovu-Koňusovu kvantovému indexu* (pro všechny referenční vektory kvantit $\mathbf{q}(t)$) a oba se současně rovnají podílu $u(1)/u(0)$. Navíc jsou v takovémto případě jak *Allenův*, tak *Pollakov-Koňusův index* zdola omezeny *Paascheho kvantovým indexem* Q_{01}^P a shora omezeny *Laspeyresovým kvantovým indexem* Q_{01}^L .

V obecném případě (není-li užitková funkce *neoklasická*), ukázal Diewert, že existuje $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že $Q_{01}^{PK}(\lambda \cdot \mathbf{q}(0) + (1-\lambda) \cdot \mathbf{q}(1))$ leží mezi Q_{01}^P a Q_{01}^L a existuje též (obecně jiné) $\lambda^* \in \langle 0,1 \rangle$ takové, že, $Q_{01}^A(\lambda \cdot \mathbf{p}(0) + (1-\lambda) \cdot \mathbf{p}(1))$ též leží mezi Q_{01}^P a Q_{01}^L . Znamená to tedy, že (prosté) *Paascheho* a *Laspeyresův kvantové indexy*, (které jsou na rozdíl od Q_{01}^{KP} , Q_{01}^{KL} a Q_{01}^A založeny na pozorovatelných veličinách), ohraničují zdola i shora *Koňusovy kvantové indexy* i *Allenův index*, pokud volíme příslušné referenční vektory vhodně mezi $\mathbf{q}(0)$ a $\mathbf{q}(1)$, resp. mezi $\mathbf{p}(0)$ a $\mathbf{p}(1)$.

V (5.30) jsme již ukázali, že oba *Koňusovy cenové indexy* P_{01}^{KP} , P_{01}^{KL} vyhovují podmínce *Fisherova testu* *proporčnosti* (F7): jestliže $\mathbf{p}(1) = c \cdot \mathbf{p}(0)$, pak $P_{01}^{KL} = P_{01}^{KP} = c$. Je to dáno tím, že *výdajová funkce* je *lineárně homogenní v cenách*. Obdobnou podmínku však nelze uplatnit ve vztahu ke kvantitám: Ani *Polakov-Koňusův kvantový index* (5.39) ani *Allenův kvantový index* (5.45) nejsou *lineárně homogenní*, nelze tedy obecně psát (při $\mathbf{q}(1) = c \cdot \mathbf{q}(0)$ s kladným skalárem c)

$$Q_{01}^{PK}(\mathbf{q}^*) = \frac{\frac{E(u(\mathbf{q}^c(1)); \mathbf{p}(1))}{E(u(\mathbf{q}^*(t)); \mathbf{p}(1))}}{\frac{E(u(\mathbf{q}(0)); \mathbf{p}(0))}{E(u(\mathbf{q}^*(t)); \mathbf{p}(0))}} = c.$$

ani
$$Q_{01}^A(\mathbf{q}^c(1)) = \frac{E(u(\mathbf{q}^c(1)); \mathbf{p}(t))}{E(u(\mathbf{q}(0)); \mathbf{p}(t))} = c \cdot \frac{E(u(\mathbf{q}(0)); \mathbf{p}(t))}{E(u(\mathbf{q}(0)); \mathbf{p}(t))} = c$$

To je mj. důvodem pro vyvození *Malmquistova indexu*, který tuto vlastnost má.