

## Racionální chování spotřebitele maximalizace užitku vs. minimalizace výdajů

Spotřebitel si při nákupu komodit počíná tak, že svůj peněžní příjem  $M$  rozdělí beze zbytku na nákup  $s$  komodit ( $1 \leq s \leq n$ ), a to tak, aby dosáhl maximálního užitku. Jinými slovy: komodity kupuje v takových množstvích (ne však nutně všechny dostupné), aby žádoucí hladiny užitku dosáhl co nejlevněji. Bude preferovat - při variantní možnosti dosáhnout hladiny užitku  $u^*$  různými kombinacemi komodit - takovou kombinaci, při níž celkový výdaj na pořízení všech užitek mu přinášejících statků (závisející zřejmě na množstvích statků a na jejich jednotkových cenách) bude nejmenší možný. Je tedy mj. zřejmé, že při jinak stejném příspěvku několika komodit k užitku (při shodných mezních užitecích těchto komodit) bude preferovat nákup komodity nejlevnější.

### Formulace maximalizačního problému

Pokud situaci zformalizujeme, máme optimalizační problém řešící nalezení maxima

$$(1A) \quad \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{za podmínky}$$

$$(1B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M \quad \text{a za podmínek nezápornosti}$$

$$(1C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i=1, 2, \dots, n.$$

Z matematického pohledu jde o úlohu nalezení vázaného extrému (zde maxima) obecně nelineární funkce na množině rozpočtového omezení  $\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$ . Jak je známo, vzhledem k tomu, že omezující podmínka spolu s podmínkami nezápornosti proměnných (1C) představuje kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu, nabývá jakákoliv spojitá a ve všech proměnných rostoucí nelineární funkce svého maxima na hranicích takovéto množiny.

Lze tedy rozpočtové omezení stejně dobře psát ve tvaru  $\sum_{i=1}^n p_i x_i = M$ .

### Řešení maximalizačního problému (1A) – (1C)

Úloha uvedeného typu se standardně řeší s použitím *Lagrangeova multiplikátoru*.

Při této reformulaci nabývá kriteriální funkce tvar

$$(2) \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right),$$

Kde  $\lambda$  je právě zmíněný *Lagrangeův multiplikátor*. S touto (hodnotou neznámou) veličinou se zachází obdobně jako s jinými proměnnými: v dalším ji budeme považovat za funkci implicitně závislou na „parametrech úlohy“ tzn. na cenách obsažených v cenovém vektoru  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  a na příjmu jednotlivce  $M$ .

Stejně jako v jiných extrémálních úlohách postupujeme tak, že vyjádříme všechny parciální derivace extremalizované funkce  $G(x, \lambda) = u(x) - \lambda \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right)$  v (2) podle proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $\lambda$  a následně je položíme rovny nule. Dostaneme

$$(3A) \quad \frac{\partial G(x, \lambda)}{\partial x_r} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_r} - \lambda \cdot p_r = 0, \quad (3B) \quad \frac{\partial G(x, \lambda)}{\partial \lambda} = - \sum_{i=1}^n p_i x_i + M = 0 \quad \text{a odtud}$$

po přeskupení členů dostaneme:

$$(3A) \quad u_r = \lambda \cdot p_r \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{derivace podle } x_r)$$

$$(3B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = M \quad (\text{derivace podle } \lambda).$$

Rovnice (3A) a (3B) jsou nutnými podmínkami k tomu, aby pro řešený optimalizační problém existovalo řešení, tedy maximum. Těchto podmínek je právě stejný počet ( $n+1$ ), jako je neznámých veličin modelu (velikostí poptávek po jednotlivých komoditách  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a pomocná proměnná  $\lambda$ ).

V „lineární situaci“ by se dalo očekávat, že řešení bude dáno jednoznačně. Zde však  $n$  vztahů (3A) nebude až na výjimky lineárními funkcemi. Jejich podoba závisí na tvaru uživatelské funkce  $u(x)$ , v níž jako argumenty vystupují neznámé  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Poznámka 1** Od úlohy lineárního programování se řešený problém liší ve dvou směrech:

a) Tvar omezení (1B) je představováno jednou nadrovinou  $n$ -rozměrného prostoru (omezující množství komodit jen "shora")

b) Uživatelská funkce  $u(x)$  bude mít zpravidla komplikovanější tvar, než je obvykle lineární funkce problému lineárního programování a problém nalezení optima bude představovat zpravidla komplikovanější analytickou úlohu než je ta, která může být řešena technikami matematického programování (např. *simplexovou metodou*).

Z podmínek (3A) tedy plyne, že v rovnovážné situaci (kdy se poptávka spotřebitele po komoditách při maximálním užítku přizpůsobí cenovým relacím) bude platit vztah

$$(4) \quad \lambda = \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \dots = \frac{u_n}{p_n}$$

Vztahy (4) představují soustavu podmínek nutných pro dosažení rovnovážného stavu. Vyjadřují požadavek, aby podíl mezního užítku kterékoliv komodity a její jednotkové ceny byl konstantní pro všechny uvažované komodity. Je odtud vidět, že veličina  $\lambda$  (uplatňující se jako *Lagrangeův multiplikátor*) je rovna všem těmto podílovým hodnotám.

O rovnováze lze oprávněně mluvit tehdy, jestliže je dosaženo maximálního užítku při daném příjmu a dané množině relativních cen. Jakékoliv vychýlení z rovnováhy vede vždy ke snížení hodnoty užítku spotřebitelem pocíťovaného.

Jestliže tedy každé  $u_r$  představuje mezní užitek (úměrný v rovnovážné situaci ceně  $r$ -té komodity), můžeme veličině  $\lambda$  přisoudit interpretaci jako „**mezní užitek peněz**“ (který je ovšem také funkcí cen  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  a příjmu  $M$ ). Za těchto okolností pak **platí pro podíl mezních užitků** (tedy mezní mírou substituce mezi  $r$ -tým a  $s$ -tým statkem) **vztah**

$$(5A) \quad m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = \frac{p_r}{p_s} \quad \text{a podobně} \quad (5B) \quad m_{r\lambda} = \frac{u_r}{\lambda} = \frac{p_r}{I}$$

Můžeme tedy říci, že **mezní míra substituce mezi  $r$ -tou a  $s$ -tou komoditou je v rovnovážné situaci rovna podílu jednotkových cen těchto komodit**. Cenu  $p_r$  lze interpretovat jako mezní míru substituce mezi  $r$ -tou komoditou a penězi.

### Duální úloha – formulace minimalizačního problému

Maximalizační problém, tak jak byl představen vztahy (1A-1C), může být formulován i obráceným způsobem. Maximalizace účelové funkce (1A) za podmínek (1B)-(1C) má svou duální formulaci následujícím tvarem

$$(6A) \quad \text{Min } M = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{za podmínky}$$

$$(6B) \quad u(x) \geq u^0 \quad \text{opět při } p_i > 0 \text{ pro libovolné } i.$$

$$(6C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Maximalizuje-li spotřebitel svůj užitek z komoditní kombinace při rozpočtovém omezení (1B), řeší v podstatě tentýž problém, jako je minimalizace jím vynaložených výdajů spojených pořízením komodit v množstvích, která zaručují dosažení užitku na požadované hladině  $u^0$ . V tomto smyslu lze mluvit o dvojici duálních úloh.

### Řešení minimalizačního problému (6A-6C)

Obdobně jako při řešení maximalizační úlohy řešíme i tuto úlohu po reformulaci úlohy užitím Lagrangeova multiplikátoru (zde označeného  $\mu$ ). Kriteriační funkce má v tomto případě tvar

$$(7) \quad \text{Min } H(x, \mu) = \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i x_i - \mu \cdot (u(x) - u^0) \right\},$$

Opět položíme parciální derivace  $\frac{\partial H}{\partial x_r}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \mu}$  rovny nule. Dostaneme

$$(8A) \quad \frac{\partial H(x, \mu)}{\partial x_r} = p_r - \mu \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_r} = 0, \quad (8B) \quad \frac{\partial H(x, \mu)}{\partial \mu} = -u(x) + u^0 = 0 \quad \text{a odtud}$$

$$(9) \quad p_r = \mu \cdot u_r \quad \text{neboli} \quad \mu = \frac{p_r}{u_r} \quad \text{a} \quad u(x) = u^0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n$$

**Poznámka 2** Mezi Lagrangeovým **multiplikátorem**  $\lambda$  (maximalizační úlohy (1)) a Lagrangeovým **multiplikátorem**  $\mu$  (maximalizační úlohy (6)) platí vztah reciprocity

$$(10) \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Maximalizace užitku a minimalizace s tím souvisejících nákladů vedou k téže (optimální) volbě komoditních množství  $x_i$  (parametry úlohy jsou  $p$  a  $M$ ), výdaj při prvé z úloh se musí rovnat minimálním nákladům v duálním problému.

❖ **Řešením maximalizační úlohy je soustava Marshallových poptávkových funkcí  $g_i(M, p)$ , v nichž příjem a cenový vektor vystupují jako parametry.**

V duálním minimalizačním problému jsou determinujícími veličinami - argumenty poptávkových funkcí - úroveň užitku  $u^0$  a cenový vektor  $p$ .

❖ **Řešení minimalizačního problému tvoří soustava Hicksových (někdy také kompenzovaných) poptávkových funkcí  $h_i(u^0, p)$ , v nichž jako parametry vystupují hladina užitku  $u^0$  a cenový vektor  $p$ .**

Z interpretačního hlediska jsou tyto funkce charakteristické tím, že informují o tom, jak jsou poptávky  $x_i$  ovlivněny/kompenzovány cenami  $p$  (při pevném  $u$ ).

Řešení obou výše definovaných problémů musí být tedy táž. Proto lze psát

$$(11) \quad x_i = g_i(M, p) = h_i(u^0, p) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n .$$

Každé z těchto řešení přitom můžeme zpět dosadit do výchozího příslušného problému. V prvním případě obdržíme *nejvyšší dosažitelný užitek*, ve druhém případě *nejmenší dosažitelné náklady*. Lze tedy psát :

$$(12) \quad u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u[g_1(M, p), g_2(M, p), \dots, g_n(M, p)] = \psi(M, p)$$

$$(13) \quad M = \sum_{k=1}^n p_k h_k(u, p) = E(u, p)$$

**Funkce  $\psi(M, p)$  v (12) vyjadřuje maximální dosažitelný užitek (při pevně daném příjmu  $M$  a cenovém vektoru  $p$ ). Nazývá se nepřímá užitková funkce [indirect utility function]<sup>1</sup> a je takto definována vztahem**

$$(14) \quad \psi(M, p) = \text{Max}_x \left[ u(x); \sum_{k=1}^n p_k x_k = M \right]$$

**Funkce  $E(u, p)$  v (13) vyjadřuje minimální dosažitelný výdaj (při požadované úrovni užitku  $u^0$  a vektoru cen  $p$ ). Nazývá se výdajová funkce [expenditure function] a lze ji definovat vztahem**

$$(15) \quad E(u^0, p) = \text{Min}_x \left[ \sum_{k=1}^n p_k x_k; u(x) = u^0 \right]$$

**Nepřímá užitková a výdajová funkce jsou vzájemně velmi úzce propojeny. Protože platí  $E(u, p) = M$ , můžeme invertovat argument  $u$ , abychom dostali  $u$  jako funkci  $M$  a  $p$ , což nám dá  $u = \psi(M, p)$ . Úplně obdobně inverze vztahu  $u = \psi(M, p)$  povede přímo k relaci  $E(u, p) = M$ . Obě funkce obsahují v podstatě tutéž informaci (zapsanou ale pomocí jiných argumentů, přičemž  $p$  zůstává v obou).**

<sup>1</sup> Pojem **nepřímé užitkové funkce** zavedl poprvé italský matematik **Giovanni Antonelli**, nezávisle na něm pak **Harold Hotelling** [1932] v textu: **Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions. Journal of Political Economics. 40-1932. s.577-616.**