2. Dvoufaktorová diferencovatelná produkční funkce a její charakteristiky

V dalším úseku výkladu o produkčních funkcích záměrně učiníme dva dočasné předpoklady:

Jednak budeme předpokládat - z důvodu matematické výhodnosti umožňující operovat s alespoň prvními dvěma parciálními derivacemi produkční funkce , že :

(a) **Produkční funkce je dvakrát spojitě diferencovatelná**, tzn. pro její analytický tvar existují všechny spojité parciální derivace nejméně do druhého řádu včetně, jednak se

(b) **Omezíme na analýzu produkční funkce, která má pouze dva výrobní faktory/argumenty**: v definicích i při značení uplatníme dva typické výrobní faktory, práci L a kapitál K :

Řekněme hned v úvodu, že dvojí spojitá diferencovatelnost produkční funkce nevyplývá bezprostředně z žádných elementárních vlastností produkčních množin (vstupů ani výstupů) a že pro některé z dále definovaných pojmů (např. pro mezní produktivity) by bylo možno rovnocenně zavést jejich "konečně malé " ekvivalenty.

V takovémto případě bude tedy mít (dvakrát spojitě diferencovatelná) produkční funkce obecný tvar

$$Y = F(K, L, \alpha, \beta, \chi, \delta, ...),$$

kde K vyjadřuje kapitál, L práci a písmena řecké abecedy (počínaje α) příslušné parametry produkční funkce. Počet i umístění těchto parametrů bude záviset na tvaru konkrétní nelinearity, kterou užijeme k popisu technologie příslušné produkční funkci $F(.)$.

Definice 5 **První parciální derivace produkční funkce podle** každého **výrobního faktoru** vyčíslená v některém pevném bodě $F(K,L)$ faktorového prostoru **je nazývána mezní (*marginální*) produktivita výrobního faktoru [factor productivity/product]** (tj. **práce** nebo **kapitálu**) v tomto bodě. Mezní produktivity budeme značit

(2.1) $$m_K = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial K} \qquad m_L = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial L}$$

Přirozeně, každá mezní produktivita může být podstatnou měrou závislá na faktorové kombinaci (K^0, L^0), v níž je vyčíslována. Podle předpokladu o neklesající produkční funkci $F(K,L)$ v obou faktorech je mezní produktivita každého výrobního faktoru vždy nezáporná. Připouští se tedy možnost dosažení určité saturační úrovně "užitečnosti" některého výrobního faktoru, po jejímž překročení se produkce již dále nezvyšuje. Z mikroekonomické reality lze zajisté jmenovat případy, kdy po nabytí jisté optimální úrovně určitého výrobního faktoru mezní užitek neroste či dokonce klesá. Takovéto případy (související zpravidla s technickou, nikoliv ekonomickou stránkou výrobního procesu) však zde nepřipouštíme .

Definice 6 Součin mezní produktivity výrobního faktoru a velikosti tohoto faktoru nazýváme **účast faktoru na produkci [factor share]** (zkráceně jen **účast**) a značíme v_i . Formálním zápisem tedy

(2.2) $$v_K = m_K \cdot K \qquad v_L = m_L \cdot L$$

Účast lze považovat - obrazně řečeno – za hodnotový příspěvek příslušného faktoru k hodnotě produkce. Je přímo úměrná jednak nasazenému množství faktoru, jednak mezní produktivitě faktoru.

Pojem účasti faktoru na produkci – jak níže ukážeme – nabývá zásadní důležitosti v souvislosti s lineární homogenitou produkční funkce. Pokud je produkční funkce lineárně homogenní, lze na základě platnosti ***Eulerovy věty*** hodnotu produkce (uvažujeme-li pouze dva výrobní faktory) zapsat jako

(2.3) $$F(K^0,L^0)=\frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial K}\cdot K^0+\frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial L}\cdot L^0$$ nebo také stručněji

(2.3A) $$F(K,L)=v_K+v_L$$

V tomto případě lze provést úplný aditivní rozklad funkční hodnoty na jednotlivé faktorové účasti. Význam obou těchto veličin je patrný přímo z jejich definice: veličina e_K podává informaci o tom, o kolik % se zvýší produkce, jestliže se množství rozklad produkce na účasti jednotlivých výrobních faktorů. Zobecnění **(2.3A)** pro vícefaktorovou produkční funkci je zřejmé.

Definice 7 Podíl relativní změny produkce a relativní změny výrobního činitele nazýváme **koeficient pružnosti (elasticity) produkce vzhledem k práci resp. kapitálu. [coefficient of the factor elasticity** relative to production**]** V zápise tedy

(2.4) $$e_K=\frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial K}\cdot\frac{K}{Y}\qquad\qquad e_L=\frac{\partial F(K^0,L^0)}{\partial L}\cdot\frac{L}{Y}$$

použitého kapitálu zvýší o 1%. Totéž platí, mutatis mutandis, pro koeficient pružnosti e_L. Oba koeficienty pružnosti jsou bezrozměrné veličiny, které popisují citlivost celkové produkce vůči individuálnímu přínosu každého z obou výrobních faktorů.

Uvažujme dále, že **u dvoufaktorové produkční funkce** $F(K,L)$ **budeme proporčně zvyšovat množství** dosazovaných **výrobních faktorů**, tj. každý z argumentů vynásobíme hodnotou $\lambda>1$. Potom **podle charakteru vývoje produkce při** této **proporční změně rozlišíme tři** základní **možnosti** :

Definice 8 Jestliže pro libovolná K,L a $\lambda>1$ bude platit nerovnost

(a) $\sigma\cdot F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)$, kde $\sigma<\lambda$, řekneme, že

produkční funkce vykazuje klesající výnosy z rozsahu výroby **[decreasing returns to scale]**. V případě, že platí

(b) $\sigma\cdot F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)$, při $\sigma=\lambda$, řekneme, že

jde o produkční funkci s konstantními výnosy z rozsahu výroby **[constant returns to scale]**. Pokud

(c) $\sigma\cdot F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)$, kde $\sigma>\lambda$, řekneme, že

produkční funkce se vyznačuje rostoucími výnosy z rozsahu výroby. [increasing returns to scale]

Poznámka 1 Empirické prověření, zda v reálné výrobní situaci platí případ **(a)**, **(b)** nebo **(c)**, je omezeno na určité rozmezí hodnot λ. Je-li produkční funkce popsána analytickým funkčním tvarem (např. dvoufaktorovou mocninnou funkcí), předpokládá se tímto zpravidla zařazení této produkční funkce mezi některý z uvedených tří případů pro libovolné $\lambda > 1$, což s předchozím nemusí korespondovat.

Poznámka 2 **Specifičtějším indikátorem vyšetřování závislosti růstu produkce na proporčním zvyšování výrobních faktorů je homogenita produkční funkce**, která ovšem předpokládá přesněji vymezený typ závislosti růstu produkce na zvětšování λ. Pouze v případě konstantních výnosů z rozsahu produkce, tj. případ b), se tato situace kryje s dále zavedeným pojmem **lineární homogenity** (též **homogenity 1. stupně**).

Definice 9 Produkční funkci nazveme **homogenní s-tého stupně**, jestliže pro libovolná dosazení výrobních faktorů K, L z faktorového prostoru a libovolné kladné λ platí

(2.5)
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^s F(K, L)$$

pro nějakou konstantu s, jejíž přípustný rozsah je zpravidla zdola omezen hodnotou -1. **V případě, že $s = 1$, mluvíme o lineárně homogenní** (produkční) **funkci.**

Homogenní funkce tvoří důležitou třídu mezi produkčními funkcemi. **Jednou z vlastností lineárně homogenní funkce je** např. **ta, že vedeme-li polopřímku** (paprsek) **z počátku souřadnic** napříč faktorovým prostorem, **pak tečny k izokvantám vedené v bodech, kde tento paprsek protíná jednotlivé izokvanty, jsou navzájem rovnoběžné.**

Definice 10 Podíl dvou mezních produktivit m_K, m_L v některém bodě faktorového prostoru se nazývá **mezní (*marginální*) míra substituce mezi prací L a kapitálem K**. Značíme ji r_{KL}

(2.6)
$$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K}$$

Jak je z **definice 10** patrno, mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí výrobních faktorů reciproká, tzn. obrátíme-li postavení práce a kapitálu v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní r_{KL}. Podotkněme, že **hodnota mezní míry substituce může silně záviset na tom, ve kterém bodě faktorového prostoru ji vyčíslujeme**. Pro mezní míru substituce platí stejně jako v případě užitkové funkce vztah :

(2.6A)
$$r_{KL} = -\frac{dK}{dL} \quad ,$$

jehož vyvození je taktéž zcela shodné se zmíněným případem :.

Předpokládejme, že máme přírůstek produkce aditivně rozdělen do dvou dílčích vlivů. V souladu s přijatým rozkladem totálního diferenciálu $dF(K^0, L^0)$ pišme :

$$dF(K^0, L^0) = \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial K} \,.\, dK + \frac{\partial F(K^0, L^0)}{\partial L} \,.\, dL$$

přičemž pro zkrácení notace pišme obě parciální derivace jako F_K resp. F_L. Při pohybu po izokvantě nedochází ke změně velikosti produkce, platí tedy $dF(K, L) = 0$. Odtud tedy

:

$$\frac{F_L\left(K^0,L^0\right)}{F_K\left(K^0,L^0\right)}=\frac{m_L}{m_K}=-\frac{dK}{dL}$$

Zde tedy vidíme, že **mezní míru substituce můžeme formulovat v pojmech parciálních derivací stejně dobře jako v pojmech konečných přírůstků/úbytků** výrobních faktorů při pohybu po izokvantě. Definiční výraz **(2.6)** může sloužit k přímému výpočtu mezní míry substituce, známe-li analytický tvar produkční funkce, zatímco přednost vyjádření **(2.6A)** spočívá v možnosti přiblížit charakteristiku r_{KL} graficky v prostředí izokvant produkční funkce. Záporné znaménko v **(2.6A)** vystihuje skutečnost, že substituce (s udržením na téže izokvantě) znamená zvýšení množství K jako nutnou kompenzaci při snížení L resp. *vice versa*.

Poznámka 3 Definování mezní míry substituce jako podílu $\frac{m_L}{m_K}$ je - co do vyjádření, která mezní produktivita má být v čitateli a která ve jmenovateli výrazu - věcí konvence. Stejně dobře bychom mohli užít i “reciproké” definice $\frac{m_K}{m_L}$. Podobně je to i se znaménkem, kdy se někdy přisuzuje výrazu r_{KL} záporná hodnota, a naopak podíl $\frac{dK}{dL}$ je brán jako kladné číslo. Zde preferujeme kladnost r_{KL} a zápornost podílu diferenciálů $\frac{dK}{dL}$ – při pohybu po izokvantě jde vždy o přírůstek jednoho a úbytek druhého výrobního faktoru (jsou-li jen dva).

Poznámka 4 V případě n faktorové produkční funkce bychom mohli analogickým způsobem zavést všech $(n-1)\times n$ “mezních měr” substituce. Polovina z nich by ovšem byla reciprokou hodnotou příslušného protějšku.

Mezní míra substituce je - jak už bylo zmíněno **- veličinou, která je velmi citlivá na to, ve kterém bodě faktorového prostoru ji vyčíslujeme**. Jestliže se podíváme na obrázek č.[.] , zaznamenáme, že v bodě B (s velkou hodnotou L a malou K, tzn. s malým podílem $\frac{K}{L}$) je velikost r_{KL} malá. Naproti tomu v bodě C charakterizovaném vysokou hodnotou faktoru K a malou faktoru L bude situace přesně opačná, tzn. r_{KL} bude mít vysokou hodnotu. **Mezní míra substituce je** tedy **nevhodná jako globální kvantitativní charakteristika pro vyjádření substitučnosti dvou faktorů u produkční funkce.** Její hodnota - třeba i při pohybu po izokvantě konstantní produkce - se velmi znatelně mění, přičemž silně závisí na proporci použití obou výrobních faktorů $\frac{K}{L}$.

V souvislosti s tímto problémem si lze položit **otázku, zda je možné, aby při pohybu po izokvantě** odpovídající nějaké pevné hodnotě produkce **zůstala mezní míra substituce stále stejná**. **Odpověď** na ni **je** snadná (a **kladná**), pokud uvážíme, že r_{KL} bude konstantní při konstantních mezních produktivitách výrobních faktorů (touto **vlastností se** ovšem **vyznačuje** právě **lineární produkční funkce**).

Lineární produkční funkce vystihuje tedy **„perfektní substitučnost“ mezi výrobními faktory.** Toto chápání „dokonalosti“ však nesmíme zaměňovat s perfektností ve smyslu úplné nahraditelnosti jednoho výrobního faktoru druhým. I touto vlastností, která souvisí s tzv. ***podstatností výrobního faktoru*** – viz část [4] - se totiž lineární produkční funkce (zdaleka ne ovšem sama) vyznačuje.

S ohledem na výše řečené bude pro vyjádření substitučnosti mezi výrobními faktory užitečné mít k dispozici dokonalejší **charakteristiku, která by potlačila vysokou závislost mezní míry substituce** r_{KL} **na poloze uvažovaného bodu** $\left(K^0, L^0\right)$ ve faktorovém prostoru, resp. na hodnotě podílu $\dfrac{K^0}{L^0}$ .Vhodnou míru zavedeme následující definicí:

Definice 11 Pružností (elasticitou) substituce [elasticity of substitution] nazýváme **relativní změnu podílu faktorů** $\dfrac{K}{L}$ **vůči relativní změně mezní míry substituce** r_{KL} **.**

Vyjádřeno formálně tedy :

(2.7)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{\dfrac{K}{L}}}{\dfrac{dr_{KL}}{r_{KL}}}$$

Jestliže použijeme stručnějšího vyjádření, např. $\dfrac{K}{L} = \omega$, pak lze s_{KL} psát jako

(2.7A)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{d(\omega)}{\omega}}{\dfrac{dr_{KL}}{r_{KL}}} = \frac{d\,ln(\omega)}{d\,ln\,r_{KL}}$$

Tato charakteristika tedy vyjadřuje substituční vztah mezi dvěma faktory “nezávisle” na tom, na jakém místě izokvanty se vyšetřovaný bod (faktorová kombinace) nachází. I zde má smysl uvažovat **otázku, zda existuje** nějaká **třída produkčních funkčních tvarů, pro které platí, že pružnost substituce** s_{KL} **je během pohybu po izokvantě konstantní**. Také **odpověď na tuto otázku je kladná**. Produkční funkce s touto vlastností se nazývají ***CES-produkční funkce*** (převzato z anglického **“*Constant Elasticity of Substitution*”**) a lze je vymezit konkrétním analytickým tvarem. Seznámíme se s nimi v části [3] .

Pružnost substituce je charakteristikou, která udává snadnost, se kterou lze jeden výrobní faktor nahradit druhým (v našem případě práci kapitálem)**, aniž se změní hodnota dosažené produkce** (v technologickém prostředí představovaném produkční funkcí $F(K,L)$).

Povšimněme si znaménka charakteristiky *pružnost substituce* v definici 11: Zřejmě jsou vždy kladné veličiny K, L, r_{KL} **v důsledku kladných mezních produktů** m_K, m_L**. Pokud při otáčení polopřímky** vymezené konstantností podílu K/L **postu-**

pujeme ve směru pohybu hodinových ručiček, bude hodnota $d(K/L)$ **záporná, přičemž hodnota** r_{KL}**, kterou „odečítáme" při „tradičním směru" pohybu po izokvantě** (*zleva shora→ doprava dolů*) zaručeně **záporná jen tehdy, bude-li splněn** ***zákon klesající mezní míry substituce*** **– viz vztah (2.15) ve Větě 2 z oddílu teorie užitku** Tato **podmínka,** jak již víme, **bude naplněna právě tehdy, bude-li produkční funkce kvazikonkávní.**

Poznámka 5 **Pružnost substituce**, tak jak je zavedena definicí **(2.7)**, **není použitelná pro výpočetní účely**, neboť z ní není zřejmé, jak lze s_{KL} určit z analytického tvaru produkční funkce (např. dvakrát spojitě diferencovatelné). Někdy, jako např. u ***Cobb-Douglasovy*** **[3.1]** nebo ***ACMS-funkce*** **[3.1]**, lze k výpočtu s_{KL} využít vhodných obratů, které však nejsou proveditelné u jiných funkčních tvarů. Proto **uvedeme vzorec, který umožňuje pružnost substituce vypočítat pro** libovolnou (dvakrát spojitě diferencovatelnou) **dvoufaktorovou produkční funkci.**

VĚTA 1 **Má-li dvoufaktorová produkční funkce** $F(K,L)$ s výrobními faktory práce L a kapitál K všechny **parciální derivace spojité až do druhého řádu včetně**, pak **lze pružnost substituce** s_{KL} **mezi oběma** těmito **faktory vyjádřit vzorcem**

(2.8)
$$s_{KL} = -\frac{L\cdot F_L + K\cdot F_K}{K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L}{F_{KK}\cdot F_L^2 - 2\cdot F_{KL}\cdot F_K\cdot F_L + F_{LL}\cdot F_K^2}\ ,\ \text{kde}$$

$$F_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}\ ,\ F_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}\ ,\ F_{KK} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2},\ F_{LL} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2}$$

$$F_{KL} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K\partial L} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L\partial K} = F_{LK}\,,$$

důkaz provedeme přímým odvozením vzorce **z definičního vztahu (2.7)** ve třech krocích:
1) Ve výrazu **(2.7)** nejprve vyjádříme diferenciální člen $d(K/L)$ na základě pravidla o rozkladu diferenciálu podílu K/L:

(2.9)
$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial K}\cdot dK + \frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L}\cdot dL$$

Výpočtem parciálních derivací v souladu s pravidly o derivování zlomků dospějeme k výrazům

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{1}{L}\cdot dK + \frac{K\cdot(-1)}{L^2}\cdot dL = \frac{1}{L}\left(dK - \frac{K}{L}dL\right)$$ Výraz v čitateli **(2.7)** je tedy roven

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = \frac{1}{K}\cdot dK - \frac{1}{L}\cdot dL = \frac{L\cdot dK - K\cdot dL}{K\cdot L}$$ a po jeho vydělení dK tedy dostáváme

$$\frac{d(\omega)/\omega}{dK} = \frac{L - K\cdot\left(\frac{dL}{dK}\right)}{K\cdot L} = \frac{L + K\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{K\cdot L} = \frac{L\cdot F_L + K\cdot F_K}{F_L\cdot K\cdot L}$$

Zde jsme opětovně využili vztahu

$$\frac{F_K}{F_L} = -\frac{dL}{dK}$$

2) Nyní přistoupíme k obdobným úpravám u jmenovatele dr_{KL}/r_{KL} ve výrazu **(2.7)**. Nejdříve rozložíme diferenciál podílu F_K/F_L na dva členy, z nichž každý je součinem parciální derivace F_K/F_L podle K, resp. L a diferenciálu příslušného argumentu (výrobního faktoru) . Dostaneme

(2.10)
$$d\left(\frac{F_K}{F_L}\right) = \frac{\partial\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\partial K}\cdot dK + \frac{\partial\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\partial L}\cdot dL$$

Dále vyčíslíme hodnoty obou parciálních derivací na pravé straně a dosadíme do **(2.10)** . Dostaneme

(2.11) $dr_{KL} = d\left(\frac{F_K}{F_L}\right) = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK}).dK + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL}).dL}{F_L^2}$ a následně

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{d\left(\frac{F_K}{F_L}\right)}{\frac{F_K}{F_L}} = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK}).dK + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL}).dL}{F_L^2}\cdot\frac{F_L}{F_K}$$

Dalšími úpravami pravé strany výrazu **(2.11)** dostáváme :

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK})\cdot 1 + (F_L\cdot F_{KL} - F_K\cdot F_{LL}).\left(-\frac{F_K}{F_L}\right)}{\frac{F_K\cdot F_L}{dK}}$$, kde

jsme opět čitatele i jmenovatele pravé strany vydělili dK a využili vztahu $\frac{dL}{dK} = -\frac{F_K}{F_L}$.

Navazující úpravy pak postupně vedou k výrazům

$$\frac{dr_{KL}}{r_{KL}} = \frac{\left(F_L\cdot F_{KK} - F_K\cdot F_{LK} - F_K\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot\frac{F_{LL}}{F_L}\right)dK}{F_K\cdot F_L} = \frac{\left(F_L^2\cdot F_{KK} - 2\cdot F_L\cdot F_K\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot F_{LL}\right)dK}{F_K\cdot F_L^2}$$

3) Souhrnně lze tedy výraz pro pružnost substituce **s_{KL}** zapsat ve tvaru

$$s_{KL} = \frac{d\omega}{\omega}\cdot\frac{r_{KL}}{dr_{KL}} = \frac{(L\cdot F_L + K\cdot F_K)\cdot dK}{F_L\cdot K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L^2}{\left(F_L^2\cdot F_{KK} - 2\cdot F_K\cdot F_L\cdot F_{KL} + F_K^2\cdot F_{LL}\right)\cdot dK}$$

což po dalších úpravách (křížovém zkrácení dK a F_L) vede k cílovému výrazu

(2.12) $$s_{KL} = -\frac{L \cdot F_L + K \cdot F_K}{K \cdot L} \cdot \frac{F_K \cdot F_L}{F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2}$$

Toto vyjádření obsahuje - vedle dosazovaných množství faktorů **K** a **L** - toliko parciální derivace produkční funkce a s_{KL} může být tedy vypočtena pro libovolnou produkční funkci. □ .

Poznámka 6 Jak patrno, znaménko výrazu **(2.12)** určuje – při kladnosti všech ostatních – jmenovatel druhého zlomku, tj. výraz $F_{KK}.F_L{}^2 - 2.F_{KL}F_K F_L + F_{LL}F_K{}^2$. Obdobně jako u užitkové funkce lze tento výraz zapsat jako kvadratickou formu (v „proměnných“ F_K, F_L) s maticí koeficientů obsahující druhé parciální derivace produkční funkce

$$(F_L, F_K)\begin{pmatrix} F_{KK} & -F_{KL} \\ -F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_L \\ F_K \end{pmatrix}$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že **zápornou hodnotu** zmíněný **výraz** (podmiňující kladnou velikost s_{KL}) **nabude tehdy, jestliže matice kvadratické formy bude negativně definitní**. ***Kvazikonkávnost produkční funkce*** $F(K, L)$ ***je*** *tedy opět* ***vlastností****, která zajišťuje, že* ***pružnost substituce mezi výrobními faktory je*** *(při kladných mezních produktivitách)* ***kladná hodnota****.*

Poznámka 7 V pracích některých autorů (spíše ale výjimečně) se lze setkat s „reciprokou“ definicí pružnosti substituce, tzn. $s_{KL}*$ je pojímána jako podíl relativní změny mezní míry substituce r_{KL} a relativní změny faktorového podílu K / L. V tomto případě bude výraz pro $s_{KL}*$ převrácenou hodnotou **(2.7)** .

Poznámka 8 Všimněme si, že pružnost substituce může nabýt kladné, záporné (případně i nulové) hodnoty. Ve vzorci **(2.8)** určuje znaménko (při kladnosti všech ostatních výrazů) jmenovatel druhého zlomku. Ten můžeme rozepsat do tvaru

$$F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2 = -\begin{vmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{vmatrix} ,$$

což lze snadno ověřit přímým výpočtem determinantu (např. *Sarusovým pravidlem*). Jmenovatel $F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2$ bude záporný právě tehdy, když bude hodnota determinantu kladná. Znamená to tedy, že kladnost pružnosti substituce přímo souvisí s *negativní definitností* matice

$$\begin{pmatrix} 0 & F_K & F_L \\ F_K & F_{KK} & F_{KL} \\ F_L & F_{KL} & F_{LL} \end{pmatrix}$$

Bude-li tato matice *negativně definitní*, bude to znamenat kladné znaménko pružnosti substituce. Jak víme z textu pojednávajícího o teorii užitku, odpovídá tato podmínka (spolu s automaticky splněným požadavkem $-F_K^{\,2} < 0$) podmínce *kvazikonkávnosti* produkční funkce. Tedy, bude-li produkční funkce *kvazikonkávní* ve smyslu definice **(P6)**, bude zajištěno, že tato funkce bude vykazovat kladnou hodnotu pružnosti substituce. U funkcí, které tuto podmínku nesplňují, nelze (přinejmenším ne v celém definičním oboru výrobních faktorů) platnost $s_{KL} > 0$ zajistit.

Výraz (2.12) pro s_{KL} lze vyjádřit ve více ekvivalentních tvarech. Jeden z užívaných uvádí následující

Lemma 1 Vzorec **(2.12)** lze vyjádřit ve tvaru

(2.13)
$$s_{KL} = \frac{\dfrac{1}{K.F_K} + \dfrac{1}{L.F_L}}{-\dfrac{F_{KK}}{F_K^{\,2}} + 2.\dfrac{F_{KL}}{F_K F_L} - \dfrac{F_{LL}}{F_L^{\,2}}}$$

Ověření Definiční výraz

(2.12)
$$s_{KL} = -\frac{L \cdot F_L + K \cdot F_K}{K \cdot L} \cdot \frac{F_K \cdot F_L}{F_{KK} \cdot F_L^2 - 2 \cdot F_{KL} \cdot F_K \cdot F_L + F_{LL} \cdot F_K^2}$$

upravíme tím způsobem, že jeho čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $KL.F_K^{\,2}.F_L^{\,2}$. Dostaneme

$$s_{KL} = -\frac{\dfrac{1}{K.F_K} + \dfrac{1}{L.F_L}}{1} \cdot \frac{1}{\dfrac{F_{KK}}{F_K^{\,2}} - 2 \cdot \dfrac{F_{KL}}{F_K F_L} + \dfrac{F_{LL}}{F_L^{\,2}}}$$

Hledaný výraz již okamžitě dostaneme úpravami znamének ve jmenovateli. .

Pro tři a více výrobních faktorů již není jednoznačné vodítko, jak „přirozeně“ definovat pružnost substituce mezi každými dvěma z nich. Nejčastěji se lze setkat s ***„přímou“ pružností substituce*** **[McFadden 1963]** označovanou ***DES*** a s ***Allenovou parciální pružností substituce*** **[Allen 1938]** značenou ***AES***.

Přímá pružnost substituce mezi j-tým a k-tým faktorem je přímým zobecněním dvoufaktorové pružnosti substituce (nemění-li se množství ostatních faktorů), tedy

(2.14)
$$s^D{}_{jk} = \frac{j \cdot F_j + k \cdot F_k}{k \cdot j} \cdot \frac{F_j \cdot F_k}{F_{jj} \cdot F_k^2 - 2 \cdot F_{jk} \cdot F_j \cdot F_k + F_{kk} \cdot F_j^2}$$
(opět $0 < s_{jk} < \infty$)

Allenova parciální pružnost substituce měří změnu v poptávce firmy po $j-$tém výrobním faktoru při dané změně ceny faktoru K (opět za podmínky *ceteris paribus* tj. *při konstantních cenách všech ostatních faktorů*). Kontext jejího užití tedy vyžaduje vzetí do úvah cenových aspektů (byť ceny definice přímo neobsahuje) :

(2.15)
$$s^A{}_{jk} = \frac{\sum x_i F_i}{x_j x_k \cdot} \cdot \frac{|\Phi_{jk}|}{|\Phi|}$$

kde $|\Phi|$ je determinant a $|\Phi_{\mathbf{jk}}|$ je algebraický doplněk k prvku ležícímu na průsečíku $\mathbf{j}+1-$tého řádku a $\mathbf{k}+1-$tého sloupce matice vytvořené (stejně jako matice **U** v teorii užitku) z prvních a druhých parciálních derivací (tentokrát) produkční funkce $\mathbf{F(x)}$. Hodnota $\mathbf{s^A}_{\mathbf{jk}}$ může být – na rozdíl od $\mathbf{s^D}_{\mathbf{jk}}$ – také libovolně záporná. S ohledem na definici prvků v této matici bude i matice pružností mezi jednotlivými faktory symetrická: $\mathbf{s^A}_{\mathbf{jk}} = \mathbf{s^A}_{\mathbf{jk}}$.

VĚTA 2 (Eulerova) Nechť $G(x)$ je lineárně homogenní (produkční) funkce **n** proměnných. Potom lze tuto funkci zapsat ve tvaru :

(2.16) $G(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i G_i(x)$, kde $G_i(x)$ je první parciální derivace **G** v bodě **x** .

důkaz Z homogenity funkce $G(x)$ vyplývá pro libovolné λ platnost vztahu :

$$G(\lambda x_1,\lambda x_2,....,\lambda x_n)=\lambda\cdot G(x_1,x_2,....,x_n)$$

Derivujme nyní levou stranu tohoto vztahu podle λ. Dostaneme (podle pravidla o derivaci složené funkce)

(2.16A)
$$\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial(\lambda x_i)}\cdot\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial(\lambda x_i)}\cdot x_i$$

Pravá strana po analogické derivaci nabude tvar

(2.16B)
$$\frac{\partial[\lambda.G(x)]}{\partial\lambda}=G(x_1,x_2,...,x_n)$$

Nyní porovnáme pravé strany **(2.16A)**,**(2.16B)** a uplatníme vlastnost lineární homogenity:

Vzhledem k tomu, že totožnost obou těchto pravých stran platí (dle předpokladu o lineární homogenitě $G(x)$) pro libovolné λ, položíme ve výrazu **(2.16A)** $\lambda=1$. Obdržíme tak

$$G(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}\cdot x_i=\sum_{i=1}^{n}G_i(x)\cdot x_i$$

z čehož plyne platnost dokazovaného tvrzení. □.

Uvedená věta, užívaná též v řadě jiných oblastí matematických aplikací, je velmi důležitá. Ukazuje, že za předpokladu lineární homogenity je možné přesně rozložit funkční hodnotu do **n** členů (součinů množství faktoru a příslušné mezní produktivity), tzn. vyjádřit tuto funkční hodnotu aditivně jako součet **n** faktorových účastí. Jak dále uvidíme, řada funkcí užívaných v teorii produkce (např.***Cobb-Douglasova funkce*** s jedničkovým součtem mocninných parametrů), má vlastnost lineární homogenity, takže je taková dekompozice proveditelná. U funkcí nesplňujících tuto vlastnost je takový rozklad uvažovatelný nanejvýš přibližně.

Další věta ukáže, že **hodnotu pružnosti substituce lze u produkčních funkčních tvarů**, které jsou **homogenní 1.stupně**, **vyjádřit** podstatně **jednodušeji** než vzorcem uvedeným ve větě 1:

VĚTA 3 Nechť je dvoufaktorová produkční funkce $F(K,L)$ lineárně homogenní. Pak lze pružnost substituce mezi výrobními faktory K,L **vyjádřit u této funkce vztahem**

(2.17)
$$s_{KL}=\frac{F_K.F_L}{F(K,L).F_{KL}}$$

důkaz Vyjdeme z obecného vztahu pro pružnost substituce **(2.8)** mezi faktory práce L a kapitál K.

(2.12)
$$s_{KL}=-\frac{L\cdot F_L+K\cdot F_K}{K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L}{F_{KK}\cdot F_L^2-2\cdot F_{KL}\cdot F_K\cdot F_L+F_{LL}\cdot F_K^2}$$

Z ***Eulerovy věty*** vyplývá pro lineárně homogenní (produkční) funkci platnost vztahu

$$F(K,L)=F_K.K+F_L.L$$

Jestliže tento aditivní rozklad zderivujeme podle obou argumentů, dostaneme

$$F_L(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\frac{\partial F_K(K,L)}{\partial L}.K+F_K(K,L).\frac{\partial K}{\partial L}+\frac{\partial F_L(K,L)}{\partial L}.L+F_L(K,L).\frac{\partial L}{\partial L}$$

Poněvadž dále $\frac{\partial L}{\partial L}=1$ **a** $\frac{\partial K}{\partial L}=0$, **obdržíme po eliminaci** $F_L(K,L)$ **na obou stranách zjednodušení**

(2.18)
$$F_{KL}(K,L).K+F_{LL}(K,L).L=0.$$

Zcela analogicky (jako parciální derivaci $F(K,L)$ podle K) **obdržíme**

$$F_K(K,L)=F_K(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}=\frac{\partial F_K(K,L)}{\partial K}.K+F_K(K,L).\frac{\partial K}{\partial K}+\frac{\partial F_L(K,L)}{\partial K}.L+F_L(K,L).\frac{\partial L}{\partial K}$$

Ze stejných důvodů jako dříve **získáme po eliminaci** $F_K(K,L)$ **na levé i pravé straně**

(2.19)
$$F_{KK}(K,L).K+F_{LK}(K,L).L=0.$$

Nyní z (2.17),(2.18) vyjádříme druhé parciální derivace $F_{KK}(K,L)$, $F_{LL}(K,L)$ **pomocí** $F_{LK}(K,L)$:

$$F_{LL}(K,L)=-\frac{K}{L}.F_{LK}(K,L) \quad \text{a podobně} \quad F_{KK}(K,L)=-\frac{L}{K}.F_{LK}(K,L)$$

a obojí dosadíme do výrazu pro s_{KL}

(2.12)
$$s_{KL}=-\frac{L\cdot F_L+K\cdot F_K}{K\cdot L}\cdot\frac{F_K\cdot F_L}{F_{KK}\cdot F_L^2-2\cdot F_{KL}\cdot F_K\cdot F_L+F_{LL}\cdot F_K^2}$$

Úpravou jmenovatele (vynásobením $K.L$ **a vytknutím** F_{KL} **) a po zkrácení** $F_K.F_L$ **dále dostaneme**

(2.20)
$$s_{KL}=\frac{F_K.F_L.F(K,L)}{F_{KL}(F_L{}^2L^2+2.F_KF_L.KL+F_K{}^2K^2)}$$

Dále si všimněme, že druhá mocnina výrazu pro $F(K,L)$ dává podle ***Eulerovy věty*** vztah

$$F^2(K,L) = F_K{}^2.K^2 + 2.F_K F_L KL + F_L{}^2.L^2$$,

tedy výraz obsažený v závorce jmenovatele. **Odtud** už snadno - krácením $F(K,L)$- **dostaneme dokazovaný tvar**

(2.17) $$s_{KL} = \frac{F_K.F_L}{F_{KL}.F(K,L)}$$ □ .

Ilustrace Usnadnění výpočtu pro **pružnost substituce** v případě lineárně homogenní funkce ukážeme na příkladu **dvoufaktorové *Cobb-Douglasovy produkční funkce*** tvaru

$$Y = F(K,L) = \beta_0.K^{\beta_1}.L^{\beta_2}$$, při $\beta_1 + \beta_2 = 1$

u níž snadno spočteme $F_K = \frac{\beta_1}{K}.F(K,L)$, $F_L = \frac{\beta_2}{L}.F(K,L)$, $F_{KL} = \frac{\beta_1.\beta_2}{K.L}.F(K,L)$

Dosazením do výrazu pro s_{KL} dostaneme

$$S_{KL} = \frac{F_K.F_L}{F_{KL}.F(K,L)} = . \frac{\frac{\beta_1}{K}.F(K,L).\frac{\beta_2}{L}.F(K,L)}{\frac{\beta_1.\beta_2.F^2(K,L)}{K.L}} = 1$$

ve shodě s výpočtem provedeným pomocí již uvedeného obratu.[1]

Poznámka 9 U lineární funkce $Y = F(K,L) = \beta_1 K + \beta_2 L$ lineárně homogenní pro případ $\beta_1 + \beta_2 = 1$ platí $F_K = \beta_1$, $F_L = \beta_2$, $F_{KL} = 0$; okamžitě dostáváme $s_{KL} = \frac{\beta_1.\beta_2}{0} = +\infty$.

VĚTA 4 Nechť G(x) je homogenní stupně s $s \geq -1$ (produkční) funkce n proměnných. **Potom** pro kteroukoliv z **n** parciálních derivací této funkce $G_i(x) = \frac{\partial G(x)}{\partial Gx_i}$ platí, že tato **parciální derivace je homogenní stupně s − 1** .

Důkaz Z homogenity s-tého stupně funkce **G(x)** plyne pro libovolné λ platnost vztahu

$$G(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^s \cdot G(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Derivováním obou stran tohoto vztahu podle x_i dostaneme

(2.20) $$\frac{\partial G(\lambda x)}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda x_i}.\frac{\lambda x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial \lambda x_i}.\lambda = \lambda^s.\frac{\partial G(x)}{\partial x_i}$$, z čehož po krácení **λ** máme

$$G_i(\lambda x) = \frac{\partial G(\lambda x)}{\partial x_i} = \lambda^{s-1}.\frac{\partial G(x)}{\partial x_i} = \lambda^{s-1}.G_i(x)$$

Odtud plyne, že funkce $G_i(x)$ je homogenní stupně $s-1$. □ .

---

[1]**Výpočet je ovšem korektní jen pro případ jedničkového součtu mocninných parametrů. Cobb-Douglasova funkce obecně není lineárně homogenní, takže bychom měli užít obecný vzorec (2.12).** Jak se trpělivý čtenář přesvědčí, i ten **poskytne hodnotu pružnosti substituce rovnou 1.**

Dva jednoduché příklady

Příklad 1 Dvoufaktorová **lineární produkční funkce** tvaru

(2.21) $$y = \alpha + \beta_1 K + \beta_2 L \qquad (\text{při } \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0) \qquad ,$$

je-li užita jako produkční, nemůže obsahovat konstantní člen (jinak by zřejmě neplatilo $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = 0$). Odtud vyplývá restrikce $\alpha = 0$. Tato funkce má

a) ***mezní produktivity*** přímo rovny parametrům, tj. $m_K = \beta_1$ a $m_L = \beta_2$

b) ***koeficienty pružnosti produkce***

vzhledem ke kapitálu $e_K = \dfrac{\beta_1 \cdot K}{Y}$ a vzhledem k práci $e_L = \dfrac{\beta_2 \cdot L}{Y}$.

Koeficienty pružnosti se tedy mění (přímo úměrně) s růstem každého výrobního faktoru.

c) ***účast kapitálu*** *na produkci* $v_K = \beta_1 \cdot K$,podobně ***účast práce*** *na produkci* $v_L = \beta_2 \cdot L$

d) ***výnosy z rozsahu*** výroby ***konstantní*** (lineární funkce je homogenní stupně 1) při $\alpha = 0$.

e) ***mezní míru substituce*** r_{KL} mezi výrobními faktory rovnou podílu "sklonových" parametrů, tj. $\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ a tedy ***konstantní*** během celého pohybu po izokvantě konstantní úrovně $\mathbf{y}_0$.

f) ***pružnost substituce*** $\mathbf{s}_{KL}$ neomezeně velkou ($+\infty$, popř. $-\infty$)

Toto konstatování ověříme následovně :

Z definice s_{KL} **plyne** $$s_{KL} = \frac{d \ln \omega}{d \ln r_{KL}} = \frac{d \ln \dfrac{K}{L}}{d \ln \dfrac{\beta_2}{\beta_1}} \qquad .$$

Jelikož však ve jmenovateli uvažujeme malou změnu výrazu, který je (i po logaritmování) při pohybu po izokvantě konstantní, má jmenovatel ("přírůstek" konstanty) nulovou hodnotu. Výraz v čitateli má konečnou velikost (je kladný pro $\mathbf{K} > \mathbf{L}$, kde podíl $\mathbf{K}/\mathbf{L} > 1$ a logaritmus je tudíž kladný resp. záporný v opačném případě $\mathbf{K}/\mathbf{L} < 1$), a plynule klesá podél uvažované izokvanty.

Též vzhledem k této vlastnosti **se lineární funkce k modelování výrobních procesů** téměř **nepoužívá**. Empirické výzkumy totiž ukázaly, že substituce mezi výrobními faktory (a to nejen mezi prací a kapitálem) probíhá obtížněji, než jak by odpovídalo konstantní hodnotě mezní míry substituce u lineární funkce.

Příklad 2 Dvoufaktorová **ryze kvadratická produkční funkce** tvaru

(2.22) $$y = \alpha + \frac{1}{2}\beta_{11}K^2 + \beta_{12}L \cdot K + \frac{1}{2}\beta_{22}L^2$$

(při $\beta_{11} > 0$, $\beta_{22} > 0$ a opět vynucené restrikci $\alpha = 0$) má

a) ***mezní produktivity*** $m_K = \beta_{11} \cdot K + \beta_{12} \cdot L$ resp. $m_L = \beta_{22} \cdot L + \beta_{12} \cdot K$, a tedy závislé na množstvích použitých výrobních faktorů,

b) ***koeficienty pružnosti produkce*** vzhledem ke kapitálu $e_K = \dfrac{\beta_{11} \cdot K^2 + \beta_{12} \cdot K \cdot L}{Y}$ a vzhledem k práci obdobně $e_L = \dfrac{\beta_{22} \cdot L^2 + \beta_{12} \cdot K \cdot L}{Y}$. Obě veličiny jsou nelineární funkcí výrobních faktorů (a to i faktoru k danému koeficientu nepříslušejícímu).

c) ***účasti na produkci*** *u* ***kapitálu*** $v_K = \beta_{11} \cdot K^2 + \beta_{12} \cdot L \cdot K$, podobně
u ***práce*** $v_L = \beta_{22} \cdot L^2 + \beta_{12} \cdot L \cdot K$

d) charakter ***výnosů z rozsahu výroby*** vyšetříme velmi snadno :

(2.23) $$F(\lambda K, \lambda L) = \beta_{11}(\lambda K)^2 + \beta_{12}(\lambda K)(\lambda L) + \beta_{22}(\lambda L)^2 = \lambda^2 \cdot F(K, L)$$

Pro $\lambda > 1$ výsledek představuje (jinak spíše vzácnou) vlastnost rostoucích výnosů z rozsahu výroby. **Vztah (2.20)** zřejmě **prokazuje homogenitu 2.stupně kvadratické produkční funkce.**

e) ***mezní míru substituce*** r_{KL} rovnou podílu

(2.24) $r_{KL} = \dfrac{m_K}{m_L} = \dfrac{\beta_{22} \cdot L + \beta_{12} \cdot K}{\beta_{11} \cdot K + \beta_{12} \cdot L}$, po drobné úpravě $\dfrac{\beta_{22} + \beta_{12} \cdot \omega}{\beta_{11} . \omega + \beta_{12}}$, kde opět $\omega = \dfrac{K}{L}$.

f) pro výpočet ***pružnosti substituce*** s_{KL}, kde nelze uplatnit stejný obrat jako u lineární produkční funkce, musíme postupovat dosazením do výpočtového vzorce **(2.8)**:

Nejprve dostaneme:

$$s_{KL} = \frac{L(\beta_{12}K + \beta_{22}L) + K(\beta_{11}K + \beta_{12}L) \cdot (\beta_{12}K + \beta_{22}L)(\beta_{11}K + \beta_{12}L)}{KL\left[\beta_{11}(\beta_{12}K + \beta_{22}L)^2 - 2\beta_{12}(\beta_{11}K + \beta_{12}L)(\beta_{12}K + \beta_{22}L) + \beta_{22}(\beta_{11}K + \beta_{12}L)^2\right]}$$

následně po běžných algebraických úpravách dospějeme k výrazu

(2.25) $$s_{KL} = \frac{(\beta_{12}K + \beta_{22}L).(\beta_{11}K + \beta_{12}L)}{KL\left[\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2\right]} = \frac{m_L m_K}{KL\left[\beta_{11} \cdot \beta_{22} - \beta_{12}^2\right]}$$

Také v tomto případě tedy závisí pružnost substituce na poloze bodu, ve kterém tuto charakteristiku vyčíslujeme (kombinaci faktorů $\mathbf{K}^0$ a $\mathbf{L}^0$).

Kvadratická produkční funkce je s ohledem na některé zmíněné nedostatky **používána zřídka**. Vedle zmíněné restrikce $\alpha = 0$ nutné k zajištění **(P1)** totiž nastává problém také s udržením nezápornosti **(P2)** a s tím, že vzhledem k požadavku daném axiomem **(P3)** je akceptovatelná vždy jen část definičního oboru: Navíc **při** $\beta_{11} > 0$, $\beta_{22} > 0$ **není funkce kvazikonkávní.**