3 Klasické funkční tvary v teorii produkce

3.1 COBB- DOUGLASova produkční funkce

Tento funkční tvar popisuje vztah mezi produkcí a výrobními faktory práce a kapitál mocninným vyjádřením tj.

(3.1) $$Y = \beta_0 \cdot K^{\beta_1} \cdot L^{\beta_2}$$,

kde se pro parametry β_1, β_2 zpravidla předpokládá omezení hodnot na interval $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$. Parametr β_0 musí být přirozeně kladný.[1] Součet obou mocninných parametrů je obvykle blízký hodnotě 1, přičemž empirické ekonometrické analýzy naznačují spíše situaci $\beta_1 + \beta_2 < 1$. Jak ukážeme, přiblížení součtu mocninných parametrů hodnotě 1 (zvláště, je-li jich více než 2) lze dobře zdůvodnit, pokud vývoj produkce v tomto funkčním tvaru je popsán výrobními faktory vyčerpávajícím způsobem.

Někdy se *a priori* předpokládá přesné splnění identity $\beta_1 + \beta_2 = 1$, což však má oprávnění jen v určitých situacích. V takovémto případě lze chování produkce vystihnout závislostí

(3.2) $$Y = \beta_0 \cdot K^{\beta} \cdot L^{1-\beta}$$,

přičemž po vydělení prací L získáme vztah

(3.3) $$\frac{Y}{L} = \beta_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}$$

a tím i ekonomicky názorně interpretovatelný vztah o závislosti veličiny $\frac{Y}{L}$ (*průměrná produktivita práce*) na intenzitním faktoru $\frac{K}{L}$ (*vybavenost práce kapitálem*) .Přitažlivost tohoto funkčního tvaru lze spatřovat i v několika dalších směrech :

1. Cobb-Douglasova funkce splňuje všechny Shephardem formulované axiomy (S1) - (S6), až na poslední (S7*) požadující ohraničenost účinné podmnožiny $E(y)$ produkční množiny vstupů, Lze se o tom snadno přesvědčit přímo, navíc **Cobb-Douglasův tvar je** při přijatých omezeních na mocninné parametry $0 < \beta_1, \beta_2 < 1$ **konkávní funkce**.

2. Ekonomické charakteristiky Cobb-Douglasovy funkce lze snadno spočíst:

a) mezní produktivity

(3.4) $$m_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot \beta_1 \cdot K^{\beta_1 - 1} L^{\beta_2} = \beta_1 \cdot \frac{Y}{K}$$

Podobně dostaneme $m_L = \beta_2 \cdot \frac{Y}{L}$; **mezní produktivity jsou** tedy β_1 **resp.** β_2 **násobky průměrných produktivit** Y/K **resp.** Y/L .

---

[1] ***Cobbova-Douglasova funkce*** byla poprvé uvedena v článku **Cobb-Douglas : "A Theory of Production"** uveřejněném v **American Economic Review (1928)**, kde byly pomocí ní ekonometricky zkoumány kvantitativní vztahy mezi produkcí, prací a kapitálem na agregované úrovni americké ekonomiky počátku 20.století.

b) *koeficienty pružnosti produkce* **vzhledem ke kapitálu**

(3.5A)
$$e_K = m_K \cdot \frac{K}{Y} = \beta_1 \cdot \frac{Y}{K} \cdot \frac{K}{Y} = \beta_1$$

a obdobně **vzhledem k práci**

(3.5B)
$$e_L = m_L \cdot \frac{L}{Y} = \beta_1 \cdot \frac{Y}{L} \cdot \frac{L}{Y} = \beta_2 .$$

Jsou tedy **přímo rovny mocninným koeficientům funkčního tvaru. Parametr** β_1 **vyjadřuje procentuální/100 míru vlivu kapitálu a podobně parametr** β_1 **procentuální/100 míru vlivu práce na hodnotě produkce.** Pokud bychom již neuvažovali působení žádných jiných výrobních faktorů na produkci, lze přijmout tezi o (zhruba) jedničkovém součtu obou parametrů (*koeficientů pružnosti produkce vůči oběma faktorům*).

Povšimněme si, že oba **koeficienty elasticity jsou konstantní** v celém faktorovém prostoru.

c) *Účasti výrobních faktorů na produkci* spočteme rovněž velmi snadno :

(3.6) $v_K = \beta_1 \cdot Y$ a podobně $v_L = \beta_2 \cdot Y$

Také odtud vyplývá logický požadavek, aby součet koeficientů $\beta_1 + \beta_2$ byl (přibližně) jedničkový.

d) *Výnosy z rozsahu* produkce lze u ***dvoufaktorové Cobb-Douglasovy funkce*** vyvodit z vyjádření :

(3.7)
$$F(\lambda.K, \lambda.L) = \alpha(\lambda.K)^{\beta_1} \cdot (\lambda.L)^{\beta_2} = \lambda^{\beta_1 + \beta_2} \cdot F(K, L),$$

Odtud je jednak patrné, že **tato produkční funkce je homogenní stupně** $\beta_1 + \beta_2$, jednak z něho přímo vyvodíme povahu výnosů z rozsahu produkce, která je určena součtem mocninných parametrů. **Jestliže** $\beta_1 + \beta_2 < 1$**, jde o klesající, pro** $\beta_1 + \beta_2 = 1$ obdobně **o konstantní, resp. při** $\beta_1 + \beta_2 > 1$ **vykazuje *Cobb-Douglasův tvar* rostoucí výnosy z rozsahu produkce.** Poslední případ lze v ekonometrických aplikacích zaznamenat jen zřídka.

e) *Mezní míra substituce* r_{KL} **se** opět snadno **určí z definičního vztahu**

$$r_{KL} = \frac{m_L}{m_K},$$

jehož naplněním pro Cobb-Douglasův tvar obdržíme

(3.8)
$$r_{KL} = \frac{\beta_2 \cdot \frac{Y}{L}}{\beta_1 \cdot \frac{Y}{K}} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{K}{L}$$

Mezní míra substituce mezi prací a kapitálem **u *Cobb-Douglasovy produkční funkce*** tedy **závisí na poloze bodu, v němž ji ve faktorovém prostoru vyčíslujeme**. Je přímo úměrná vybavenosti práce kapitálem (tj. podílu K/L) a podílu elasticit β_2/β_1)

f) ***Pružnost substituce*** s_{KL} **určíme** tentokrát jiným postupem než pomocí některého z dříve uvedených výpočetních vzorců, a to **pomocí následujícího obratu**:

Logaritmujme vztah **(3.8)**, přičemž podíl $\frac{K}{L}$ označme stručněji jako ω. Nejprve dostaneme

(3.9) $$ln\, r_{KL} = ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + ln\, \omega$$

a následným diferencováním

(3.10) $$d\, ln\, r_{KL} = \frac{\partial\, ln\, r_{KL}}{\partial\, ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \cdot d\, ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + \frac{\partial\, ln\, r_{KL}}{\partial\, ln\, \omega} \cdot d\, ln\, \omega$$

neboť jiné změny než obou aditivních komponent pravé strany **(3.9)** neuvažujeme. Jak blíže patrno, **výraz** $d\, ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$ **jako změna konstanty** (nezávislé na měnících se K, L) **je nulový a** obdobně **podíl** $\frac{\partial\, ln\, r_{KL}}{\partial\, ln\, \omega}$ **je roven jedné**, což je zřejmé, vyjádříme-li parciální derivaci (podle $ln\, \omega$) vztahu **(3.9)**. Diferenciál $d\, ln\, r_{KL}$ vyjádřený aditivním rozkladem **(3.10)** se tímto redukuje na vztah

(3.11) $$d\, ln\, r_{KL} = d\, ln\, \omega$$

Vzhledem k tomu, že podíl pravé a levé strany **(3.11)** není nic jiného než „**logaritmická**" **definice pružnosti substituce** s_{KL} - viz definiční vztah **(2.7A)** -, znamená to, že $s_{KL} = 1$. Stejný výsledek bychom obdrželi pomocí výpočetního vzorce **(2.8)** nebo – za podmínky $\beta_1 + \beta_2 = 1$ –přes vztah **(2.17)**. Získaný výsledek znamená mj. to, že ***Cobb-Douglasův funkční tvar*** je příkladem **produkční funkce, u níž je elasticita substituce** s_{KL} **nezávislá na poloze faktorové kombinace na** příslušné **izokvantě** (s_{KL} **je** tedy **konstantní**).

3. Ještě se stručně zmíníme o ekonometrické úloze ***odhadu parametrů Cobb-Douglasovy produkční funkce***. **Logaritmováním** výchozího tvaru **(3.1) získáme**

(3.12) $$ln\, Y = ln\, \beta_0 + \beta_1\, ln\, K + \beta_2\, ln\, L$$

Připojením náhodné složky ε_t s přisuzovanými vlastnostmi (**centrovanost, homoskedasticita a nekorelovanost s oběma vysvětlujícími proměnnými**) přejdeme k regresnímu vztahu (v zápise pro vektory pozorovaných hodnot Y_t, K_t a L_t) $t = 1, 2, ..., T$, v němž T je délka vzorku pozorování :

(3.12A) $$ln\, Y_t = ln\, \beta_0 + \beta_1\, ln\, K_t + \beta_2\, ln\, L_t + ln\, \varepsilon_t.$$

Při této specifikaci by náhodné odchylky ε_t ovšem musely být připojeny multiplikativně, tzn. stochasticky vyjádřená ***Cobb-Douglasova funkce*** by musela mít tvar

(3.13) $$Y_t = \beta_0 \cdot K_t^{\beta_1} \cdot L_t^{\beta_2} e^{\varepsilon t}$$

a **náhodné odchylky by nemohly být záporné** (vylučovalo by to mj. jejich normální rozdělení).

Při odhadu parametrů *Cobb-Douglasovy funkce* lze na lineárně-aditivní tvar **(3.12A) uplatnit** např. prostou **metodu nejmenších čtverců** (***MNČ, OLS***). Jako závisle proměnná bude v regresi vystupovat logaritmovaná hodnota produkce $ln\,Y_t$, jako nezávisle proměnné pak logaritmované hodnoty práce $ln\,L_t$ a kapitálu $ln\,K_t$. **Uvedeným postupem získáme** přímo (*konzistentní*) **odhady parametrů** β_1 **a** β_2 a též odhad logaritmované hodnoty **úrovňového parametru *Cobb-Douglasova*** tvaru $\beta_0^{\,*} = ln\,\beta_0$. Odhad β_0 původního parametru pak získáme snadno zpětnou exponenciální transformací $\beta_0 = e^{\beta^{0*}}$.

Pro úplnost je třeba uvést, že tímto způsobem získaný odhad parametrů β_0, β_1, β_2 nebude (ze statistického hlediska) nejlepší možný. Jak patrno, **minimalizačním kritériem** při výše uvedeném postupu **je výraz**

(3.14) $\sum_{t=1}^{T}\left(ln\,Y_t - ln\,\hat{Y}_t\right)^2$, **nikoliv původní součet čtverců**

(3.15) $\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2$, kde

$\hat{Y}_t$ **označuje vyrovnané hodnoty závisle proměnné**. Měření odchylek Y_t od Y_t^* zde probíhá v "logaritmované", nikoliv v původní „metrice". **Pokud bychom trvali na původním kritériu, museli bychom k přesnému odhadu parametrů uplatnit nelineární metodu nejmenších čtverců (*NLMNČ, NLLS*)**. Dodejme současně, že ve většině praktických situací nebudou rozdíly mezi jedním resp. druhým způsobem odhadnutými parametry příliš velké. ***Cobb-Douglasova produkční funkce*** je z tohoto hlediska jen „slabě nelineární", neboť po logaritmické transformaci jde o funkční tvar, který již **je lineární v parametrech.**

Podobu izokvant Cobb-Douglasovy funkce ovlivňují všechny tři parametry. Parametr β_0 má vliv na „vzdálenosti" izokvant o různých hladinách produkce, míru zakřivení pak určují mocninné parametry β_1, β_2 . V případě rovnosti obou parametrů β_1, β_2 budou izokvanty symetrické vůči ose/paprsku vycházejícího z počátku pod úhlem *45*^{0}. S ohledem na multiplikativní tvar funkce **nemohou izokvanty** (*pro konečné hodnoty výrobních faktorů*) **přilnout k souřadnicovým osám** (blíží se k nim však asymptoticky), tzn. že jak práce L tak kapitál K jsou ***podstatné*** (**„*essential*"**) **výrobní faktory**. Nejsou-li přítomny v kladných množstvích, nelze dosáhnout (*ani při jakkoliv velkém nasazení ostatních výrobních faktorů*) kladné hodnoty produkce.

3.2 LEONTIEFova produkční funkce

Tato produkční funkce nese pojmenování po významném americkém ekonomu a ekonometru ruského původu **Vasiliji Leontjevovi** (v anglické transkripci psáno ***Wassilly Leontieff***) a představuje vůči ***Cobb-Douglasově produkční funkci*** zcela protikladný případ (v ekonomické realitě však nijak řídký).

Tímto způsobem **vyjádřená výrobní technologie nepřipouští žádnou substitučnost mezi výrobními faktory**. Mluvíme o tzv. ***pevných technických koeficientech***, jinými slovy o výrobním procesu, který racionálně probíhá pouze při *pevných proporcích nasazení výrobních faktorů*. Tato produkční funkce má méně obvyklý tvar :

(3.14) $$Y = Min[\alpha.K\,;\beta.L] \quad ,$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ jsou vhodné kladné konstanty.

Leontjevova produkční funkce je na první pohled charakteristická tím, že její izokvanty mají podobu dvou hran (levé a dolní) neomezených pravoúhelníků, přičemž styčný rohový bod je právě jediným bodem účinné podmnožiny (produkční množiny vstupů) a jeho souřadnice udávají právě požadovaný poměr nasazení výrobních faktorů. Pro různé hodnoty produkce leží tyto vrcholy na polopřímce vycházející z počátku, jejíž směrnice je rovna podílu $\frac{\beta}{\alpha}$.

Obdobný obraz obdržíme u vícefaktorové *Leontjevovy funkce* s tím, že geometrická podoba závisí na počtu faktorů (v případě tří faktorů je účinný bod rohem neomezeného kvádru). Žádná možnost substituce mezi výrobními faktory se ani zde nepřipouští.

Případ pevných výrobních koeficientů je především na mikroúrovni a v situacích, kdy jde o modelování technických či chemických vztahů, dosti běžný. V metalurgii je řada výrobních procesů charakteristická tím, že se připouští nanejvýš nepatrná variabilita použitých kovů/prvků: výroba nerezových ocelí, složení speciálních slitin (dělovina, zvonovina). Podobně se chová celá řada chemických procesů, u kterých dosažení žádoucí chemické sloučeniny (slitiny) (krakování ropy, výroba barviv apod.) vyžaduje dodržení přesného poměru v nasazení výrobních faktorů. Podobně ve zlatnictví máme sice možnost směšovat cenné kovy (stříbro, zlato, paladium, platina) v širokém rozmezí vzájemných proporcí, avšak zvyklosti trhu vyžadují dodržení tradičních poměrů (např. 14, 18 nebo 22-karátové zlato).

Probereme postupně **ekonomické charakteristiky** ***Leontjevovy produkční funkce***:

a) *Mezní produktivity* práce $m_L = \frac{\partial Y}{\partial L}$ a kapitálu $m_K = \frac{\partial Y}{\partial K}$ určíme limitním způsobem výpočtu derivací. Platí :

(3.15A) $$\frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{Min[\alpha(K+\Delta K);\beta L] - Min[\alpha K\,;\beta L]}{\Delta K}$$

$= 0$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě βL

$= \alpha$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě αK

(3.15B) $$\frac{\partial Y}{\partial L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{Min[\alpha K\,;\beta(L+\Delta L)] - Min[\alpha K\,;\beta L]}{\Delta L}$$

$= 0$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě αK
$= \beta$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě βL

Jediným bodem, kde jsou obě mezní produktivity kladné, je tedy zmíněný **vrchol pravoúhelníka** (zde platí rovnost $\beta L = \alpha K$).

b) ***Koeficienty pružnosti produkce*** odvodíme snadno: ***vzhledem ke kapitálu*** mají tvar

(3.16A) $e_K = m_K \frac{K}{Y} = \alpha \frac{K}{Y}$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě αK , jinak 0 .

a ***vzhledem k práci***

(3.16B) $e_L = m_L \frac{L}{Y} = \beta \frac{L}{Y}$ pro případ, že minima se nabývá v hodnotě βL , jinak 0 .

c) ***Účasti výrobních faktorů na produkci*** určíme stejně lehce :

(3.17) $v_K = m_K \cdot K = \alpha \cdot K$ a podobně $v_L = m_L \cdot L = \beta \cdot L$

se stejnými omezeními na minimalizující faktor v produkční funkci jako tomu je u mezních produktivit (v opačných případech je příslušná faktorová účast nulová).

d) Vyšetření povahy ***výnosů z rozsahu výroby*** u ***dvoufaktorové Leontjevovy produkční funkce*** přináší tento výsledek :

(3.18) $$F(\lambda K, \lambda L) = Min[\alpha\lambda K\,; \beta\lambda L] = \lambda Min[\alpha K\,; \beta L] = \lambda \cdot F(K, L)$$

z čehož je patrné, že **funkce je lineárně homogenní** a tudíž má **konstantní výnosy z rozsahu**.

e) ***Mezní míru substituce*** r_{KL} rovněž snadno určíme z definičního vztahu $r_{KL} = \frac{m_L}{m_K}$,

který nabývá jedinou "standardní" hodnotu $\frac{\beta}{\alpha}$ v bodě, kde platí $\alpha K = \beta L$. V jiných bodech izokvant je hodnota r_{KL} buď nulová (na horizontálním úseku izokvanty, kde i velmi malý přírůstek množství kapitálu nelze substituovat jakkoliv velkým množstvím práce) nebo naopak nekonečně velká (na svislém úseku izokvanty stačí nepatrné množství práce ke zvýšení produkce, což není dosažitelné samostatně žádným konečným množstvím kapitálu). Faktory mají **vlastnost** tzv. *limitovatelnosti*, o níž bude pojednáno v **části [4]**.

f) Konečně velikost ***pružnosti substituce*** s_{KL} vyvodíme následovně : **V rohu** nekonečného pravoúhelníka je **mezní míra substituce** $r_{KL} = \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$. Vyjdeme li z tohoto bodu, pak jakýkoliv posun po izokvantě implikuje vždy skokovitou změnu r_{KL} , a to buď na hodnotu + ∞ (směr nahoru) nebo na hodnotu 0 (směr doprava). Proto dr_{KL} = + ∞ , a tudíž dr_{KL} / r_{KL} = + ∞ . Výraz $d\, ln(K/L)$ bude mít při pohybu po izokvantě vycházeje z téhož bodu naproti tomu vždy konečnou velikost, neboť poměr faktorů se mění spojitě. Proto bude $s_{KL} = 0$. Výpočetní vzorce obsahující výpočty derivací (ač je Leontiefova funkce lineárně homogenní), nelze k určení s_{KL} použít, neboť parciální derivace na izokvantě neexistují (jsou různé zleva/zprava resp.shora/zdola).

3.3 ACMS (ARROW - CHENERY- MINHAS - SOLLOWova) produkční funkce

ACMS-funkce byla vyvinuta za účelem postihnout obecný tvar funkce vykazující vlastnost konstantní pružnosti substituce.[2] Z tohoto důvodu bývá také často označována jako ***CES-funkce*** (z anglického "***Constant Elasticity of Substitution***"). Toto označení však není zcela přesné, neboť - jak jsme viděli - i ***Cobb-Douglasova*** funkce má zmíněnou vlastnost. Zejména v 60. a 70.letech 20.století byl níže uvedený funkční tvar produkční funkce předmětem zevrubného teoretického zkoumání a – jako alternativa ke ***Cobb-Douglasově*** funkci – mnohokrát nasazen v empirickém ekonometrickém výzkumu.

V původním zápise pro dva výrobní faktory práce L a kapitál K má tvar

(3.21) $$Y = \gamma \cdot \left(\delta \cdot K^{-\rho} + (1-\delta) \cdot L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

přičemž **každý z jejích tří parametrů** γ**,** δ**,** ρ **má** svůj **specifický význam**, omezení přípustných hodnot i pojmenování.

- **parametr** γ (vždy>0) udává vztah mezi měřítky jednotek výrobních faktorů a produkce a nazývá se proto ***parametr úrovně***,

- **parametr** δ (situovaný do intervalu $(0,1)$) separuje vliv každého výrobního faktoru samostatně a je pojmenován ***distribuční parametr*** a

- **parametr** ρ je nazýván ***substituční parametr***, neboť jím (a jen jím) je určena velikost pružnosti substituce s_{KL}**.** Tento parametr může nabývat přípustných hodnot ze sjednocení intervalů $\langle -1,0) \cup (0,+\infty)$.

Přes poněkud komplikovanější definiční výraz **lze na ACMS-funkci** jednodušeji **pohlížet jako na váženou střední hodnotu** (dvou **výrobních faktorů** K,L) **stupně** σ. Položíme-li totiž $\sigma = -\rho$ a zapíšeme-li $\frac{Y}{\gamma}$ jako Q, lze pak výraz **(3.21)** zapsat jako

(3.22) $$Q^{\sigma} = \left(\delta.K^{\sigma} + (1-\delta).L^{\sigma}\right),$$

Přitažlivost tohoto funkčního tvaru vyplývá mj. ze skutečnosti, že ***ACMS-funkce*** představuje (spolu se svými „krajními" případy ve vztahu k substitučnímu parametru ρ : ρ = -1, ρ = + ∞ či „limitním" případem $\rho = 0$) úplnou **třídu funkčních tvarů vykazujících konstantní pružnost substituce** s_{KL} během pohybu po kterékoliv izokvantě. Jedničková hodnota této charakteristiky u ***Cobb-Douglasovy funkce*** je totiž z hlediska převažující náročnosti substituce (a to nejen práce kapitálem) příliš „příznivá". Ve skutečnosti probíhá proces nahrazování jednoho faktoru druhým (a vice versa) obtížněji.

Konkrétně **pro hodnotu** $\rho = -1$ **nabývá** ***ACMS-funkce*** **tvar** prosté ***lineární produkční funkce*** (jak patrno po přímém dosazení).

[2] ACMS funkční tvar produkční funkce byl poprvé publikován autory **K.Arrow, H.B.Chenery, B.Minhas a R. Sollow** v článku **Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency** uveřejněném v ***Review of Economics and Statistics*** **(1961)**.

(3.23) $F(K,L) = \beta_1.K + \beta_2.L$, kde $\beta_1 = \gamma.\delta > 0$, $\beta_2 = \gamma.(1-\delta) > 0$.

Dále lze ukázat oboustranným limitním přechodem pro $\rho \to 0$, že ***při*** $\rho = 0$ ***ACMS funkce*** **přechází v** ***Cobb-Douglasovu funkci***, konkrétně tvaru

(3.24) $$F(K,L) = \gamma \cdot K^{\delta} \cdot L^{1-\delta}$$

Konečně **v limitním případě** $\rho \to +\infty$ **nabývá** ***ACMS-funkce*** **tvar** určený **Leontiefovou produkční funkcí**

(3.25) $$F(K,L) = Min[\delta.K;(1-\delta).L].$$

Je tedy pozoruhodné, že **ACMS-funkce pokrývá jak substituční případy tak i typicky "nesubstituční", komplementární situaci**.

Nejprve se přesvědčíme, že ***ACMS-tvar*** **představuje** skutečně **produkční funkci**. To opět provedeme postupným vyšetřením **Shephardových axiomů**, což je nepatrně obtížnější než u ***Cobb-Douglasovy funkce***:

(S1) Pro $\rho \in (-1,0)$ platí $\lim\limits_{K \to 0+} \delta K^{-\rho} = 0$ i $\lim\limits_{L \to 0+} (1-\delta) \cdot L^{-\rho} = 0$ a proto

$$\lim_{K,L \to 0+} F(K,L) = 0$$

Jestliže naopak $\rho \in (0,+\infty)$, potom také

$\lim\limits_{K \to 0+} \delta \cdot K^{-\rho} = +\infty$ i $\lim\limits_{L \to 0+} (1-\delta) \cdot L^{-\rho} = +\infty$, což však opět znamená, že

$$\lim_{K,L \to 0+} \gamma \cdot \left(\delta \cdot K^{-\rho} + (1-\delta) \cdot L^{-\rho}\right)^{-1/\rho} = 0$$

Spojitým dodefinováním hodnotou 0 lze tedy pro oba intervaly ρ zajistit platnost podmínky $F(0,0) = 0$.

Funkce **(3.21)** **je** zřejmě **konečná pro konečná** K, L **a spojitá v celém definičním oboru**, z čehož vyplývá splnění axiomů (S2) a (S5).

K ověření (S3) stačí ukázat, že ***ACMS-funkce*** **je rostoucí v obou argumentech** :

Je-li totiž $\rho \in (-1,0)$, pak $\delta \cdot K^{-\rho}$ je rostoucí v K a shodně $(1-\delta) \cdot L^{-\rho}$ je rostoucí v L. Následně složená funkce $\gamma \cdot z^{-\frac{1}{\rho}}$, kde $z = \left(\delta \cdot K^{-\rho} + (1-\delta) \cdot L^{-\rho}\right)$ je rostoucí v K i L. Jestliže opačně $\rho \in (0,+\infty)$, potom $\delta \cdot K^{-\rho}$ je klesající v K a obdobně $(1-\delta) \cdot L^{-\rho}$ je klesající v L, v důsledku čehož funkce $\gamma \cdot z^{-\frac{1}{\rho}}$, kde $z = \left(\delta \cdot K^{-\rho} + (1-\delta) \cdot L^{-\rho}\right)$ je opět rostoucí v K i L .

Pro ověření (P4) použijeme vyšetření proporcionální úměrnosti (s nějakým kladným λ):

(3.26)

$$F(\lambda K,\lambda L)=\gamma\cdot\left(\delta\cdot(\lambda K)^{-\rho}+(1-\delta)\cdot(\lambda L)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}=\gamma\cdot\left[\lambda^{-\rho}\left(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right)\right]^{-\frac{1}{\rho}}=\lambda^{1}F(K,L)$$

Z toho jednak plyne, že pro všechny kombinace vstupů poskytující kladný výnos (tj. pro $-1<\rho<0$ jde o $x\geq 0$ a pro $\rho>0$ o $x>0$) platí $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$, jednak je tím prokázána lineární homogenita *ACMS-funkce*.

Kvazikonkávnost (P6), která se přímo dokazuje (zejména pro více výrobních faktorů) nesnadno, zde vyplývá z konkávnosti *ACMS-funkce*. Vyšetřujeme-li konečně platnost podmínky **(P7*)**, zjišťujeme, že pro ρ vybrané z intervalu $(0,+\infty)$ nejsou účinné podmnožiny $E(Y^0)$ ohraničené. Pro $-1<\rho<0$ se tato slabina neprojevuje, avšak z empirických šetření (a následně odhadnutého ρ) vyplývá, že typičtější je právě opačný případ. Navíc s ohledem na to, že rozsah kladných hodnot ρ je nepoměrně „bohatší" než interval záporných, není v tomto směru přednost ***ACMS–produkční funkce*** před ***Cobb-Douglasovým tvarem*** nijak zřetelná.

Nyní se budeme věnovat vyčíslení podstatných ekonomických charakteristik u tohoto typu dvoufaktorové produkční funkce (za výrobní faktory ve shodě s (3.30) považujeme práci L a kapitál K) :

a) mezní produktivity
práce

(3.27) $$m_K=\frac{\partial Y}{\partial K}=-\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta\cdot K^{-\rho}+(1-\delta)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\left[-\delta\cdot\rho\cdot K^{-\rho-1}\right]$$

resp. ***kapitálu***

(3.27B) $$m_L=\frac{\partial Y}{\partial L}=-\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta\cdot K^{-\rho}+(1-\delta)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\left[(\delta-1)\cdot\rho\cdot L^{-\rho-1}\right]$$

získáme snadno derivováním, přičemž získané výrazy lze dále upravit s využitím definičního vztahu

$$Y=\gamma\left[\delta\cdot K^{-\rho}+(1-\delta)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$ na

(3.28A,B) $$m_K=\frac{Y}{K}\cdot\frac{1}{1+\frac{(1-\delta)\omega^{\rho}}{\delta}}$$ resp. $$m_L=\frac{Y}{L}\cdot\frac{1}{1+\frac{\delta}{(1-\delta)\omega^{\rho}}}$$

b) účasti faktorů na produkci následně přijímají tyto výrazy

(3.29A) $$v_L=m_L\cdot L=\frac{Y}{1+\frac{\delta}{(1-\delta)\omega^{\rho}}}$$ pro ***účast práce*** ,

(3.29B) $$v_K=m_K\cdot K=\frac{Y}{1+\frac{(1-\delta)\omega^{\rho}}{\delta}}$$ pro ***účast kapitálu*** .

Jak je patrné, jak mezní produktivity, tak faktorové účasti závisí na poměru faktorů $\frac{K}{L}$ i na všech parametrech ACMS – funkce. S ohledem na přípustné hodnoty parametrů ACMS-tvaru jsou kladné.

c) koeficienty pružnosti produkce obdržíme stejně snadno .Vzhledem ke kapitálu dostaneme

(3.30A) $$e_K = m_K \cdot \frac{K}{Y} = \frac{1}{1 + \frac{(1-\delta)\omega^\rho}{\delta}}$$

elasticitu vzhledem k práci pak jako

(3.30B) $$e_L = m_L \cdot \frac{L}{Y} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{(1-\delta)\omega^\rho}}$$

Také koeficienty pružnosti, jak je vidět, závisí na poměru faktorů $\omega = \frac{K}{L}$.

d) Charakterizaci ***výnosů z rozsahu*** výroby jsme v podstatě již podali v průběhu vyšetřování axiomu (S4). Konstatovali jsme, že ***ACMS-produkční funkce*** **vykazuje konstantní výnosy z rozsahu výroby v důsledku homogenity 1. stupně** (bez ohledu na velikosti úrovňového a substitučního parametru).

e) mezní míra substituce je dána podílem $\frac{m_L}{m_K}$ a jako taková má vyjádření

(3.30B) $$r_{KL} = \frac{K}{L} \cdot \frac{\dfrac{1}{1 + \dfrac{\delta}{(1-\delta)\omega^\rho}}}{\dfrac{1}{1 + \dfrac{(1-\delta)\omega^\rho}{\delta}}}$$,

které může být dále zjednodušena na výraz

(3.31A) $$r_{KL} = \omega^{\rho+1} \cdot \frac{1-\delta}{\delta}$$

závisející opět na podílu $\omega = \frac{K}{L}$ proměnlivém ve faktorovém prostoru.

f) pružnost substituce lze určit opět vhodným obratem snadněji než z definičního vztahu **(3.10)**: Vyjděme ze vztahu **(3.31A)** pro mezní míru substituce, který zlogaritmujeme. Dostaneme

(3.32) $$\ln r_{KL} = (\rho+1)\ln\omega + \ln\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)$$

Po uplatnění rozkladu diferenciálu máme

(3.33A) $$d\ln r_{KL} = \frac{\partial \ln r_{KL}}{\partial(\rho+1)\ln\omega} \cdot d(\rho+1)\ln\omega + \frac{\partial \ln r_{KL}}{\partial \ln\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)} \cdot d\ln\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)$$

Člen $d\,ln\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)$ představuje, jak je zřejmé, "změnu" konstanty (při pohybu faktorů K, L ve faktorovém prostoru), a je tedy roven nule. Člen $\frac{\partial\, ln\, r_{KL}}{\partial(\rho+1)ln\,\omega}$ na stejné straně (3.33 A) je roven 1, neboť de o derivaci levé strany (3.32) podle prvního členu v tomtéž výrazu napravo. Po tomto zjednodušení máme $d\,ln\,r_{KL} = d(\rho+1)ln\,\omega$, neboť $(\rho+1)$ je konstantní hodnota a změna faktorů se odehrává toliko v ω. Odtud dále plyne

(3.34)
$$\frac{\partial\, ln\, r_{KL}}{\partial\, ln\,\omega} = \rho+1$$

Elasticita substituce s_{KL} je z definice rovna reciproké hodnotě levé strany **(3.33A)**, takže platí :

(3.35)
$$s_{KL} = \frac{1}{\rho+1}$$

s_{KL} tedy u ***ACMS-produkční funkce*** závisí jen na velikosti substitučního parametru ρ.

Poznámka Vzhledem k tomu, že *CD-funkční tvar* je speciálním případem *ACMS-funkce* v limitě pro $\rho \to 0$, lze pozorovat plnou shodu i v hodnotách s_{KL}, kde rovněž pro $\rho = 0$ dává výraz (3.35) velikost 1.
Obdobně při $\rho \to +\infty$ (případ Leontjevova funkčního tvaru) platí $\lim\limits_{\rho\to+\infty} s_{KL} = 0$ a konečně $\lim\limits_{\rho\to-1} s_{KL} = +\infty$, odpovídá případu „nekonečně dobré substituce faktorů " u lineární produkční funkce .

3.4 Produkční funkce typu ADDILOG

(3.36) $$Y = \beta_1 K^{\alpha_1} + \beta_2 L^{\alpha_2}$$

může být rovněž jako funkce vystihující výrobní proces z určitých hledisek akceptována.[3] Obvykle se přitom přijímá zúžení přípustných hodnot parametrů na: $\beta_1, \beta_2 > 0$, α_1, $\alpha_2 \in (0,1)$, zejména s tím cílem, aby ekonomické charakteristiky (co do znamének a směrů vlivu) nabývaly realistických hodnot. U funkčního tvaru **(3.36)** snadno spočteme:

a) ***mezní produktivity*** výrobních faktorů :

(3.37) $$m_K = \beta_1 \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1}, \quad m_L = \beta_2 \alpha_2 L^{\alpha_2 - 1},$$

odkud vyplývá potřeba omezení hodnot parametrů do výše vymezených intervalů, mají-li být mezní produktivity kladné a mít klesající přírůstky.

b) Výrazy pro ***koeficienty pružnosti produkce*** nabývají tvaru

(3.38A,B) $$e_K = m_K \cdot \frac{K}{Y} = \beta_1 \alpha_1 \frac{K^{\alpha_1}}{Y} \quad \text{resp.} \quad e_L = m_L \cdot \frac{L}{Y} = \beta_2 \alpha_2 \frac{L^{\alpha_2}}{Y}$$

c) ***účasti výrobních faktorů na produkci***

(3.38A,B) $$v_K = \beta_1 \alpha_1 K^{\alpha_1}, \qquad v_L = \beta_2 \alpha_2 L^{\alpha_2} \quad ,$$

což rovněž musí být kladné veličiny .

e) ***Mezní míru substituce*** r_{KL} odvozenou jako podíl $\frac{m_L}{m_K}$ neboli

(3.39) $$r_{KL} = \frac{\beta_2 \alpha_2 L^{\alpha_2 - 1}}{\beta_1 \alpha_1 K^{\alpha_1 - 1}}$$

f) ***Elasticitu substituce*** spočteme tentokrát podle obecného výpočtového vzorce **(3.8)**

Zřejmě $$F_K = m_K, F_L = m_L, F_{KK} = \beta_1 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) K^{\alpha_1 - 2},$$

$$F_{LL} = \beta_2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) L^{\alpha_2 - 2}, F_{KL} = 0,$$

což dosazeno do **(3.8)** vede k výrazu

$$s_{KL} = \frac{\beta_2 \alpha_2 L^{\alpha 2} + \beta_1 \alpha_1 K^{\alpha 1}}{K \cdot L} \cdot \frac{\beta_1 \alpha_1 K^{\alpha 1 - 1} \beta_2 \alpha_2 L^{\alpha 2 - 1}}{\beta_1 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) K^{\alpha 1 - 2} \left(\beta_2 \alpha_2 L^{\alpha 2 - 1}\right)^2 + \beta_2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) L^{\alpha 2 - 2} \left(\beta_1 \alpha_1 K^{\alpha 1 - 1}\right)^2}$$

Ten může být poněkud zjednodušen, např. na tvar

(3.40) $$s_{KL} = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha_1 u + \alpha_2 v}{u + v}} \quad ,$$

[3] **Uvedený tvar přímého *ADDILOG*u poprvé použil** (*byť jako užitkovou funkci*) **Holanďan Hendrik S. Houthakker v r. 1960 v článku Additive preferences** viz ***Econometrica Vol.28/No2*** **(1960).**

v němž $u = \beta_1 \alpha_1 K^{\alpha_1}$, $v = \beta_2 \alpha_2 L^{\alpha_2}$.

g) Pokud jde o ***výnosy z rozsahu*** výroby, je zřejmé, že k dosažení homogenity je u ***ADDILOGu*** nutná restrikce $\gamma = 0$, po níž dostaneme

$$F(\lambda K, \lambda L) = \beta_1 (\lambda K)^{\alpha_1} + \beta_2 (\lambda L)^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1} \beta_1 K^{\alpha_1} + \lambda^{\alpha_2} \beta_2 L^{\alpha_2}.$$

Dále vidíme, že **funkce může být homogenní jen při splnění podmínky** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, **kde** α **je** příslušný **stupeň homogenity.**