5.4 Nákladová minimalizace

Uvažujme minimalizační problém, v němž jsou nezáporné jednotkové ceny výrobních faktorů $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ určeny exogenně jako vektor $p=(p_1,p_2,...,p_n)$, tedy

(5.18) $$\underset{x_i}{Min}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ za

podmínky, že dosahovaná úroveň produkce je rovna (alespoň) y^0 , tj. $F(x)\geq y^0$. K tomu připojíme obvyklé podmínky nezápornosti množství výrobních faktorů $x_i \geq 0$.

Pohleďme na tuto optimalizační úlohu jako na **problém nalézt vázaný extrém funkce a proměnných** $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ (při pevných cenách/parametrech). Optimálního stavu (rovnováhy) lze dosáhnout ve dvou krocích. Nejprve **předpokládejme, že je dán objem produkce** y^0 **a ceny výrobních faktorů** $p=(p_1,p_2,...,p_n)$. Spotřeba faktorů $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ je taková, že výrobní náklady px jsou minimální za podmínky

$F(x)=y^0$.

Tuto **minimalizační úlohu lze řešit**, jak známo, např. **pomocí *metody Lagrangeových multiplikátorů***. S ohledem na jedinou omezující podmínku zde postačí jeden multiplikátor. Označíme ho λ. Znamená to minimalizovat výraz tvaru

(5.19) $$H(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda.(F(x)-y^0)$$ při daných $y^0, p_i, i=1,2,...,n.$

Derivacemi podle jednotlivých $x_i, i=1,2,...,n$ **a jejich anulováním obdržíme postupně soustavu podmínek nutných pro rovnováhu :**

(5.20) $$\frac{\partial H(x,\lambda)}{\partial x_i}=p_i-\lambda.F_i(x)=0$$ pro $i=1,2,...,n$

(5.20A) $$\frac{\partial H(x,\lambda)}{\partial \lambda}=F(x)-y^0=0$$

Z **(5.20a)** dostaneme poptávkové funkce $x_1^*, x_2^*,....,x_n^*$ jako funkce parametrů $y^0, p_1, p_2,..., p_n$. Tyto funkce musí splňovat podmínky nutné pro rovnovážný stav :

(5.21) $$\frac{p_i}{F_i(x^*)}=\lambda.$$ pro $i=1,2,...,n$

(5.21A) tj. $$\frac{p_1}{F_1(x^*)}=\frac{p_2}{F_2(x^*)}=....=\frac{p_n}{F_n(x^*)}=\lambda$$)

za vedlejší podmínky $F(x)=y^0$. Výrobní náklady $\sum p_i x_i$ jsou tedy rovněž funkcí parametrů y^0 a p. Tyto podmínky vyjadřují požadavek, aby podíl mezní produktivity každého výrobního faktoru a jeho jednotkové ceny byl konstantní pro všechny faktory. Převrácené hodnoty těchto (stejných) podílů jsou rovny multiplikátoru λ .

Poznámka 1 Podmínky **(5.21)** můžeme interpretovat prostřednictvím pojmu ***parciální***

mezní náklady: Jde o podíl změny $p_i dx_i$ na celkových nákladech a příslušné změny $F_i dx_i$ v objemu produkce (znamená to malou změnu x_i, přičemž ostatní $x_j, j \neq i$ zůstávají beze změny. Platí totiž

$$\frac{\dfrac{\partial \sum p_i x_i}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_i}} = \frac{p_i}{F_i(x)}$$

Poznámka 2 Všimněme si dále, že platí $\partial C / \partial y = \lambda$.

ověření: Poptávkové funkce (vyjádřené pro rovnovážný bod) jsou zřejmě funkcí cenového vektoru p a stanovené úrovně produkce y. Můžeme tedy psát $x_1 = x_1(y,p), x_2 = x_2(y,p)$. Ze zápisu produkční funkce máme

$$F(x_1(y,p), x_2(y,p)) = y$$

Provedeme-li ne obou stranách parciální derivace podle y, dostaneme

$$F_1 . \frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + F_2 . \frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 1$$

Z nutných podmínek pro rovnovážný bod pak vyplývá

$$\frac{p_1}{\lambda} . \frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{p_2}{\lambda} . \frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 1$$

Vynásobením obou stran rovnice λ dostáváme

$$p_1 . \frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + p_2 . \frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = \lambda$$

Protože dále platí

$$C(y,p) = p_1 x_1(y,p) + p_2 x_2(y,p) \quad ,$$

zřejmě máme

$$\frac{\partial C(y,p)}{\partial y} = p_1 . \frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + p_2 . \frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = \lambda \quad .$$

Postačující podmínky (zajišťující minimalizaci výrobních nákladů) mají tvar, *mutatis mutandis*, jako v případě maximalizace užitkové funkce. Rozdíl je dán tím, že zde řešíme úlohu nalezení minima. Aby byla minimalizována hodnota výrobních nákladů, je nutné, aby *druhý diferenciál* níže definované *kvadratické formy* $d^2 H(x^*, \lambda)$ *vyčíslený v bodě* x^* *byl záporný* pro všechna dx_i, ne všechna nulová:

(5.22A) $$d^2 H(x^*, \lambda) = -\lambda . \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{jk}(x^*) dx_j dx_k \right] > 0.$$

a to pro všechna dx_j propojená vedlejší podmínkou

(5.22B) $$\sum_{i=1}^{n} F_i(x^*).dx_j = 0.$$

Tato vedlejší podmínka je odvozena diferencováním ze vztahu $F(x^*) = y^0$

Podmínka **(5.21A)** je zřejmě ekvivalentní požadavku, aby platila (při kladném λ, což plyne z **(3.20)**) nerovnost

(5.23A) $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{jk}(x^*) dx_j dx_k < 0.$$

pro všechna dx_j provázaná zmíněnou vedlejší podmínkou.

(5.23B) $$\sum_{i=1}^{n} F_i(x^*).dx_j = 0.$$

Převedeme-li – obdobně jako v případě užitkové funkce – výše uvedené podmínky na vlastnost (symetrické) matice Φ, vzniklé z matice druhých parciálních derivací produkční funkce $F(x)$ ovroubením *gradientním vektorem* v prvním řádku a prvním sloupci (a s nulovým levým horním prvkem), lze požadavek na existenci extrému v bodě x^* vyslovit ekvivalentně jako požadavek na *střídání znamének konečné posloupnosti hlavních minorů matice Φ* [1], tj.

(5.24) $$(-1)^k . \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k1} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k & F_{1k} & F_{2k} & \dots & F_{kk} \end{vmatrix} > 0 . \qquad k = 2,3,\dots,n$$

Pokud tedy má daná kombinace množství výrobních faktorů x^* vést k minimalizaci výrobních nákladů, musí s přidáním každého výrobního faktoru (bez ohledu na pořadí jejich výběru) dojít ke změně znaménka takto zvětšeného *hlavního minoru matice Φ* (s kladnou hodnotou pro dva výrobní faktory) vyčíslené v této uvažované faktorové kombinaci x^*. Není-li tomu tak, bod x^* minimem být nemůže.

Na nákladovou minimalizaci navazuje jako druhý krok maximalizace zisku. Tu provedeme tak, že při dané jednotkové ceně výrobku q stanovíme rozsah výroby tak, aby byl maximalizováno rozpětí mezi tržbami a náklady. Zisk je tímto je vyjádřen jako

(5.25) $$q.y^0 - C(y^0, p) \quad ,$$

tj. rozdíl mezi objemem tržeb a výrobními náklady. K tomu ovšem stačí položit (kladný) multiplikátor λ hodnotě q (jednotkové ceně výrobku). Tím je řečeno, že v rovnovážné situaci jednak platí (nutné) podmínky $p_i / F_i(x^*) = q$ pro všechna $i = 1,2,\dots,n$ jednak

---

[1] Je zřejmé, že pro $k = 1$ je vztah (5.23) splněn vždy: minor je roven $-F_1^2$

(jako postačující) též *Hicksovy podmínky stability* **(5.22)**,resp. **(5.23)**.

Ilustrace Výše uvedený postup ukážeme nyní na nejjednodušším případě, v němž výrobní technologie operuje tak, že je vyráběn pouze jeden výrobek y, k jehož zhotovení se používají dva výrobní faktory x_1, x_2.

Nejprve vyšetříme podobu podmínek nutných pro rovnovážný bod. Postupně odvodíme výrazy pro změnu poptávky po každém výrobním faktoru při změně jedné z cen (arbitrárně zvolme p_1). Vyjdeme přitom z podmínek **(5.25)**:

(5.26A,B,C) $$F(x_1(p),x_2(p))=y^0 \quad F_1(x_1(p),x_1(p)).\lambda=p_1$$
$$F_2(x_2(p),x_2(p)).\lambda=p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle p_1 (ceny, která se mění). Dostaneme

(5.27A) $$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+\frac{\partial F(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial p_1}=0\,.$$

(5.27B) $$F_1.\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}.+\lambda.(\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial p_1})=1\,.$$

(5.27C) $$F_2.\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}.+\lambda.(\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial p_1}+\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial p_1})=0\,.$$

Po jednoduché úpravě druhé a třetí rovnice (vydělením každé z nich λ) dostáváme soustavu tří rovnic pro tři neznámé (dvě poptávkové změny $\partial x_1/\partial p_1$ a $\partial x_2/\partial p_1$ a pomocnou neznámou $1/\lambda.\partial\lambda/\partial p_1)$. Tuto soustavu je pak možno souhrnně vyjádřit vektorově-maticovým zápisem

(5.28) $$\begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}.\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud použitím *Cramérova pravidla* již snadno získáme řešení: výraz pro poptávkové změny.

(5.29) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{|\Phi_1|}{|\Phi|}\,,\quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1}=\frac{|\Phi_2{}^*|}{|\Phi|}$$, kde

$$\Phi_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ F_1 & \frac{1}{\lambda} & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{pmatrix} \qquad \Phi_2=\begin{pmatrix} 0 & F_1 & 0 \\ F_1 & F_{11} & \frac{1}{\lambda} \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem obou determinantů dostaneme

(5.30) $$|\Phi_1| = \frac{-F_2^{\,2}}{\lambda} \qquad |\Phi_2| = \frac{F_1 F_2}{\lambda}$$

a tedy následně

(5.31) $$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-F_2^{\,2}}{\lambda .. |\Phi|} \qquad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{F_1 . F_2}{\lambda .. |\Phi|}$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda > 0$ a $|\Phi| > 0$, dostáváme zřejmě, že $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$, zatímco $\partial x_2 / \partial p_1 > 0$. Znamená to tedy, že růst ceny příslušné výrobnímu faktoru vede k poklesu poptávky po něm, zatímco v případě druhého přítomného faktoru vede růst jeho ceny k růstu poptávky. Oba výrobní faktory jsou tedy v substitučním vztahu.

5.4 **Přímá maximalizace zisku** pomocí ziskové funkce

Rozšiřme úlohu formulovanou v části **[5.3]** tak, že *souběžně* s minimalizací nákladové stránky výroby budeme usilovat o dosažení maximálního zisku z hodnoty vyrobené produkce. K tomuto účelu potřebujeme vedle výše výrobních nákladů (připomeňme, že ty jsou dány součinem množství výrobních faktorů a jejich jednotkových cen) stanovit hodnotu, za kterou se bude vytvořená produkce prodávat na trhu. Proto je třeba do úvah zařadit veličinu množství výrobků a k nim příslušných jednotkových cen, tedy (při $\boldsymbol{m}$ výrobcích) hodnotu skalárního součinu tvaru

(5.32) $$\mathbf{q.y} = \sum_{j=1}^{m} q_j y_j$$

Maximalizaci zisku (při nejmenších možných výrobních nákladech) lze pak zapsat ve tvaru

(5.33) $$\mathrm{Max}\,\Pi(q,p) = \mathrm{Max}\left[q.y - p.x\right] = \mathrm{Max}\left[\sum_{j=1}^{m} q_j y_j - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]$$

tentokrát však bez přímého uvažování vedlejší podmínky $F(x) \geq y^0$ představující požadavek, aby produkce dosažitelná pomocí vektoru množství výrobních faktorů **x** měla alespoň velikost y^0. Zisková funkce $\Pi(q,p)$ v **(5.32)** pak udává maximální dosažitelný zisk z produkce realizované při minimálních výrobních nákladech a při tržně stanovených cenách p a q .

V dalším výkladu se pro zjednodušení omezíme na situaci, kdy je produkován pouze jediný výrobek, $m = 1$, tzn. $\boldsymbol{qy} = qy$. Příslušné úvahy by nicméně zůstaly v platnosti i pro případ sdružené produkce, tj. tehdy, pokud bychom rozšířili pojem produkční funkce na vektorovou situaci. S ohledem na sledovaný cíl (nalézt optimální rozsah výroby, při němž je minimalizován zisk) však bude nyní nutno na argumenty ziskové funkce pohlížet odlišně : Ceny p a q budeme považovat za exogenně stanovené „parametry“ úlohy, zatímco optimalizaci budeme provádět vzhledem k (proměnným, hledaný) množstvím výrobních faktorů. Abychom však nekomplikovali situaci dalším symbolem, přidržíme se původního značení ziskové funkce Π.

Nutné podmínky pro to, aby v konkrétním bodě x^* byla maximalizována zisková funkce[2], jsou

(5.34)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = 0.$$

vyčíslení parciálních derivací zde vede k soustavě podmínek nutných pro rovnovážný bod[3]:

(5.35A)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = q.\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} - p_1 = 0\,.$$

(5.35B)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = q.\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} - p_2 = 0\,.$$

(5.35C)
$$\frac{\partial\tilde{\Pi}(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = q.\frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} - p_n = 0\,.$$

Optimální (rovnovážná) spotřebovávaná množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ získáme nyní jako funkce cen $x_i^* = x_i^*(\mathbf{q},\mathbf{p})$ úpravou předchozí soustavy rovnic, v níž píšeme

(5.36)
$$F_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad : \quad \frac{p_j}{F_j(\mathbf{x}^*)} = q$$

$$\left(\text{ tj. } \frac{p_1}{F_1(\mathbf{x}^*)} = \frac{p_2}{F_2(\mathbf{x}^*)} = \dots = \frac{p_n}{F_n(\mathbf{x}^*)} = q \right)$$

Optimální rozsah výroby je potom dán vztahem $y = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, je tedy vyvozen pro danou technologii z optimálních množství výrobních faktorů x^*. Z dosaženého lze vyvodit :

A) Vztah **(5.36)** ukazuje, že v rovnovážném stavu x^* je poměr spotřeby kterýchkoliv dvou faktorů r, s takový, že mezní míra substituce mezi nimi $F_r(x^*)/F_s(x^*)$ je rovna poměru cen těchto faktorů p_r / p_s.

B) Optimální rozsah výroby, tj. množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ a následně

---

[2] Používáme značení $\tilde{\Pi}$ oproti Π, protože zisková funkce definovaná v {5.15] je funkcí cen $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$. Zde, ač pracujeme s formálně shodným výrazem $\boldsymbol{qy} - \boldsymbol{px}$, pohlížíme na tento výraz odlišně: při maximalizaci (5.33) pokládáme obojí ceny za pevně dané, maximum zisku se hledá ve vztahu k rovnovážnému bodu, který určují hledaná optimálně užitá množství výrobních faktorů $\boldsymbol{x}^*$ - produkci pak určíme z produkční funkce $y^* = F(\boldsymbol{x}^*)$

[3] Zde na rozdíl od situace v části [5.3] však neprovádíme podmíněnou, nýbrž nepodmíněnou maximalizaci, není tedy důvod uplatňovat postup s použitím Lagrangeova multiplikátoru.

hodnota produkce $y^* = F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ je pak dána úrovněmi $p_i = q.F_i(x^*)$ pro všechna $j = 1,2,..,n.$ Znamená to, že rozsah výroby se zvětšuje potud, pokud hodnota mezní produktivity (při daném pevném q) každého faktoru není rovna relativní ceně (vůči q) tohoto faktoru. V té chvíli se dosáhne rovnovážného stavu, v němž se výrobní poměry ustálí. V tomto stavu platí $F_i(x^*) = p_i / q$ pro všechna. $i = 1,2,..,n.$

Poznamenejme ještě, že cílové kritérium, minimalizace zisku zde není přímo spojeno s požadavkem, aby hodnota produkce dosáhla jistou (dostatečnou) úroveň y^0: Výrobce bude mít zájem zvyšovat produkci do té doby, než se dosáhne, při zpravidla klesajících mezních produktech, podmínek **(5.36)**. Na této úrovni se pak rovnovážná (optimální) výroba ustálí.

Dodatek Zkusme nyní vyšetřit, jak se bude chovat změna poptávky po výrobních faktorech při změně produkce $\mathbf{y}$: k cenám jako argumentům poptávkové funkce tak přibude ještě (proměnlivá) velikost produkce $\mathbf{y}$:

vyjděme ze vztahů **(5.26)** resp. **(5.26)**:

(5.37A,B,C) $$F(x_1(y,p), x_2(y,p)) = y$$

$$F_1(x_1(y,p), x_2(y,p)).\lambda = p_1 \qquad F_2(x_2(y,p), x_2(y,p)).\lambda = p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle y (produkce). Dostaneme:

(5.38A) $$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 1.$$

(5.38B) $$F_1.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \lambda.(\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y}) = 0.$$

(5.38C) $$F_2.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \lambda.(\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y}) = 0.$$

Po drobné úpravě – vydělení druhé a třetí rovnice multiplikátorem λ - máme

(5.38*A) $$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 1.$$

(5.38*B) $$F_1.\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 0.$$

(5.38*C) $$F_2.\frac{1}{\lambda}.\frac{\partial \lambda}{\partial y}. + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 0.$$

Tyto tři vztahy přepíšeme do vektorově-maticové podoby

(5.39)

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}.\frac{\partial\lambda}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí Cramérova pravidla nyní **dostaneme řešení pro** hledané dvě **neznámé** $\frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial x_2}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_1 & 0 & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_2 & 0 & \mathbf{F}_{22} \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{\mathbf{F}_{12}.\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1.\mathbf{F}_{22}}{|\Phi|},$$

(5.40)[4]

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{F}_1 & 1 \\ \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_{11} & 0 \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_{12} & 0 \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{\mathbf{F}_1.\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_2.\mathbf{F}_{11}}{|\Phi|}$$

Pokud jde o znaménka obou derivací, lze vyvodit následující:

Determinant ve jmenovatelích obou derivací bude kladný právě tehdy, bude-li produkční funkce kvazikonkávni. Při kladnosti mezních produktů F_1, F_2, zápornosti členů F_{11}, F_{22} budou mít oba čitatelé kladné hodnoty, pokud $F_{12} > 0$, což v případě dvou faktorů musí platit vždy.[5] V souladu s realitou tedy při růstu produkce poptávka po obou výrobních faktorech poroste.

[4] Podobně jako v části pojednávající o teorii rovnováhy spotřebitele lze z Hicksových podmínek vyvodit, že $F_{ii} < 0$.

[5] Máme-li pouze dva výrobní faktory, musí být tyto, jak bylo dříve ukázáno, v substitučním vztahu,