

Model překrývajících se generací

Model překrývajících se generací (Overlapping Generation model, OLG). Tak trochu jiná třída modelů. Proč? Agenti nežijí nekonečně dlouho, ale mají životní cyklus.

V OLG modelech žijí zároveň mladí a staří agenti, staří umírají a noví se narodí atd. OLG modely mají jiné závěry než modely s nekonečným horizontem (konkurenční rovnováha nemusí být Pareto optimální, může existovat více rovnováh).

Podíváme se na úspory a akumulaci kapitálu, demografické změny a na penzijní systém.

Model

Diskrétní čas, $t = 1, 2, 3 \dots$. Na začátku každého období $t \geq 1$ se narodí nová generace (kohorta). Agenti žijí jen dvě období. Značení: mladí (young) index y nebo 1, staří (old) index o nebo 2). V čase $t=1$ je tam kohorta starých, kteří dožívají.

Populace roste konstantním tempem $L_t = L_{t-1}(1 + n)$.

Preference

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

Splňuje klasické vlastnosti.

Mladí mají jednu jednotku práce, kterou nabízejí na trhu práce. Staří nepracují. (Počáteční kohorta starých je vybavena kapitálem, daným exogenně). Mladí obdrží mzdu a rozhodují se kolik spotřebují a kolik uspoří. Staří pouze spotřebovávají, žijí ze svých úspor (a úroků).

Technologie

Firmy najímají práci L_t a kapitál K_t a vyrábějí produkt pomocí produkční funkce

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Splňuje klasické vlastnosti, včetně CRS, lze vyjádřit per capita $y_t = f(k_t)$. Předpokládáme, že kapitál nedepreciuje $\delta = 0$.

Časový sled událostí

Obrázek.

Řešení a rovnováha

První generace a všechny další

$$\max_{c_{1t}, c_{2t+1}, s_1} u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

vzhledem k

$$\begin{aligned}c_{1t} &= w_t - s_{1t} \\c_{2t+1} &= (1 + r_{t+1})s_{1t}\end{aligned}$$

Plus původní nultá generace

$$\max_{c_{21}} u(c_{21}) \quad \text{vzhledem k} \quad c_{21} = (1 + r_1)\bar{k}_1$$

Firmy

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - w_t L_t - R_t K_t$$

Konkurenční rovnováha

Série alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ (spotřeby a úspor) agentů a série alokací firem $\{K_t, L_t\}_{t=1}^{\infty}$ (kapitálu, práce) a série cen $\{w_t, r_t\}_{t=1}^{\infty}$ (mzdy a úrokové míry), které řeší

- optimalizační problém spotřebitelů
- optimalizační problém firem
- trhy se čistí v každém období (trh statků, trh práce, trh kapitálu)

Podmínka vyčištění trhu kapitálu říká, že zdrojem pro kapitál v $t + 1$ jsou úspory generace mladých v období t , tedy $K_{t+1} = L_t s_{1t}$.

Vliv úrokové míry na úspory (spotřebu)

CRRA funkce

$$U = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Celoživotní rozpočtové omezení

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Řešením optimalizace je (jak jinak) Eulerova rovnice

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = [\beta(1 + r_{t+1})]^{\frac{1}{\theta}}$$

Růst spotřeby, když spotřebitelé trpělivější nebo úroková míra vyšší. Řešení pro c_{1t}

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} w_t$$

případně pro úspory

$$s_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}} w_t$$

Růst r_{t+1} způsobí (spotřebitel je v roli věřitele)

- důchodový efekt, růst důchodu, zvýšení spotřeby obou normálních statků
- substituční efekt, cena spotřeby v t je relativně vyšší (cena budoucí spotřeby nižší), více spotřebovat levnější statek, více c_{2t+1} méně c_{1t}

Obrázek. Pro případ CRRA funkce, efekty závisí na elasticitě substituce $\frac{1}{\theta} = \sigma$.

- $\frac{1}{\theta} = \sigma > 1$ $SE > IE$, spotřeba c_{1t} klesá, úspory s_{1t} rostou

- $\frac{1}{\theta} = \sigma < 1$ $IE > SE$, spotřeba c_{1t} roste, úspory s_{1t} klesají
- $\frac{1}{\theta} = \sigma = 1$ $IE = SE$, log funkce, oba efekty se vykrátí, úroková míra nemá vliv na spotřebu a úspory

Co když spotřebitel vydělává i ve druhém období?

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{\frac{1}{\theta} - 1}} \left(w_t + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right)$$

SE i IE zůstávají, nový efekt bohatství, spotřeba c_{1t} klesá, úspory s_{1t} rostou.

Dynamická analýza modelu

Logaritmická užtková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce. Úspory jako funkce mzdy

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t$$

jako funkce kapitálu

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1 + \beta} (1 - \alpha) k_t^\alpha$$

Z rovnice pro vyčištění trhu kapitálu

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{1 + n}$$

Vývoj kapitálu v čase (jako funkce kapitálu)

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)} k_t^\alpha$$

Steady state

$$k^* = \left[\frac{\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)} \right]^{\frac{1}{1 - \alpha}}$$

Kapitál na hlavu (capital-labor ratio) je konstatní k^* . Jak roste K_t ?

$$K_{t+1} = K_t(1 + n)$$

Vliv demografických změn na míru úspor

Agregátní úspory

$$S_t = K_{t+1} - K_t = nK_t$$

Agregátní míra úspor (v steady-statu)

$$S^* = \frac{S_t}{Y_t} = \frac{nK_t}{Y_t} = \frac{nk}{y} = \frac{n\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)}$$

Pokles n (např. snížení porodnosti, populace stárne).

- Počet mladých agentů je relativně menší vůči starým. Úspory jsou dělány mladými (úspory budou nižší). Posun nabídky vlevo.
- Menší počet mladých snižuje nabídku práce. Kapitál bude méně vybaven prací, mezní produkt kapitálu bude menší. Posun poptávkové křivky vlevo.

Množství úspor poklesne, poklesne i výstup (ale méně). Míra úspor se tedy sníží.

Jak snížení n ovlivní rovnovážnou úrokovou míru?

$$r^* = \frac{\alpha(1 + \beta)(1 + n)}{\beta(1 - \alpha)}$$

Pokles n způsobí pokles r^* .

Rovnováha OLG modelu obecně

Z našeho příkladu

$$s_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}} (1 + r_{t+1})^{1 - \frac{1}{\theta}}} w_t$$

tedy úspory jsou funkcí r_{t+1} krát w_t , tedy $s_{1t} = s(r_{t+1})w_t$. Kapitál závisí na úsporách, což po dosazení dává

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{(1+n)} = \frac{s(r_{t+1})w_t}{(1+n)} = \frac{1}{1+n} s(f'(k_{t+1})) [f(k_t) - k f'(k)_{t+1}]$$

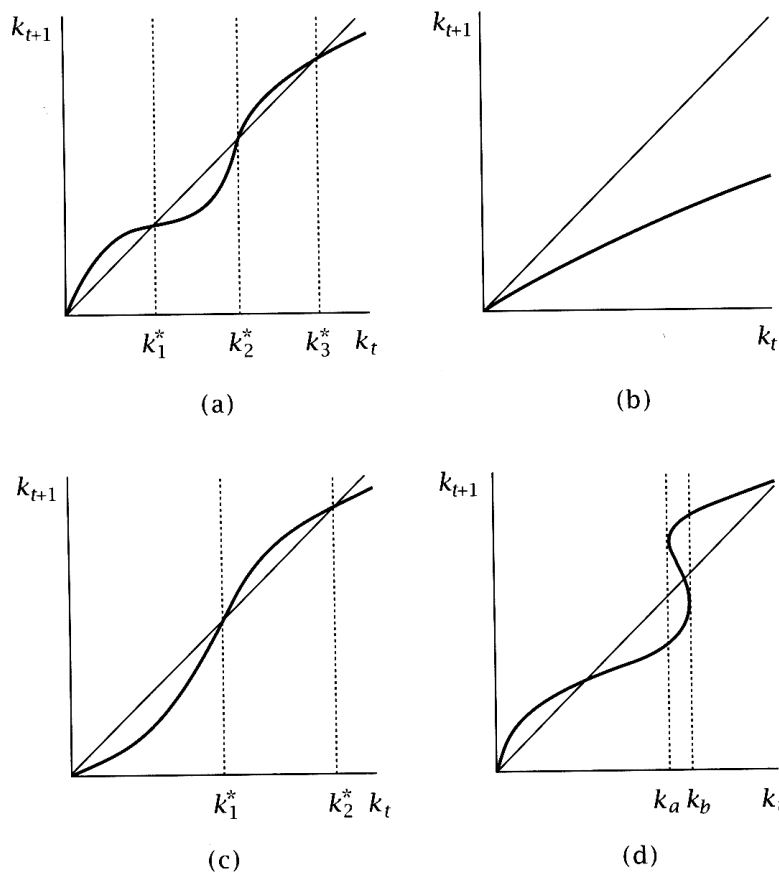
Trochu upravíme

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s(f'(k_{t+1})) \frac{[f(k_t) - k f'(k)_{t+1}]}{f(k_t)} f(k_t)$$

Zprava doleva: Výstup; část výstupu jako odměna práci (labor share); část výstupu, která je uspořena (míra úspor).

Jednoduchý model, ale můžeme dostat různé typy dynamického chování. Obrázek.

- Panel (a), vícenásobná rovnováha (multiple equilibria). (i) když labor share je větší při vyšších hodnotách k_t nebo (ii) když pracovníci spoří velkou část příjmu, když je nízká míra návratnosti (nízký mezní produkt, tedy velké k_t).
- Panel (b), konvergence k 0.
- Panel (c) opět multiple equilibria, pro malé k_t konvergence k 0, pro velké k_t konvergence k pozitivní hodnotě.
- Panel (d) ukazuje, že k_{t+1} není jednoznačně určeno. Rozsah k_a až k_b , kde jsou možné tři hodnoty k_{t+1} . Může nastat, když jsou úspory klesající funkcí r . Může docházet k fluktuacím ekonomiky i bez exogenních disturbancí. *Self-fulfilling prophecies* nebo *sunspots*.



Pareto neefektivnost

Srovnání OLG modelu s Ramseyho modelem.

Ekonomika s depreciací kapitálu.

Omezení ekonomiky

$$K_{t+1} - (1 - \delta)K_t + c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1} = F(K_t, L_t)$$

$$(1 + n)k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1 + n} = f(k_t)$$

Spotřeba na pracovníka (obou generací)

$$c_t = c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1 + n}$$

Spotřeba v s.s.

$$c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$$

Max spotřeby

$$f'(k_{gr}) = n + \delta$$

Zlaté pravidlo. Ekonomika může být

- dynamicky efektivní, $k^* < k_{gr}$, (zvýšení kapitálu zvýší spotřebu v dlouhém období, ale na náklady nižší spotřeby v krátkém období)
- dynamicky neefektivní, $k^* > k_{gr}$, ekonomika akumuluje příliš mnoho kapitálu (snížení kapitálu zvýší spotřebu ve všech obdobích)

Ramseyho model

Bez růstu technologie, ale s růstem populace.

Eulerova rovnice z minulé přednášky (růst populace, technologie, nejistota)

$$\frac{\gamma\eta}{\tilde{c}_t} = \beta E_t \frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} \left[(1 - \delta)z_t + \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} (h_t)^{1-\alpha} \right]$$

Pro náš případ vypadá

$$(1 + n)u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]$$

Ve steady statu, plus použijeme $\beta = \frac{1}{1+\rho}$.

$$(1 + n)(1 + \rho) = (1 - \delta) + f'(k^*)$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho > n + \delta = f'(k_{gr}) \quad (1)$$

Rovnice (1) je tzv. *modifikované zlaté pravidlo*. Kapitál splňující modifikované zlaté pravidlo je striktně menší než $f'(k_{gr})$.

Domácnost by mohla spotřebovávat více ve steady-statu, ale je netrpělivá a nechce snížit dnešní spotřebu, aby dosáhla vyšší spotřeby dle zlatého pravidla (raději si vybere více vyhlazenou spotřebu).

Ramseyho model: ve steady statu nemůže být dynamicky neefektivní. Navíc je sociálně optimální, což je důležitější než spotřeba dle zlatého pravidla.

OLG model

V OLG modelch může být $k^* > k_{gr}$. Příklad z minula. Logaritmická užitková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce. Nulová depreciace.

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t = \frac{\beta}{1+\beta} (1-\alpha) k_t^\alpha$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} k_t^\alpha$$

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Mezní produkt kapitálu

$$f'(k^*) = \alpha(k^*)^{\alpha-1}$$

$$f'(k^*) = \alpha \frac{(1+\beta)(1+n)}{\beta(1-\alpha)} = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha}$$

Když je α nebo ρ jsou nízké, může se stát, že steady state v OLG modlech je dynamicky neefektivní, tzn. $k^* > k_{gr}$

$$f'(k^*) = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha} < n + (\delta) = f'(k_{gr})$$

Co s tím? Můžeme zvýšit spotřebu ve všech obdobích přeskupením zdrojů.

Pareto optimální alokace

je sekvence alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^\infty$ která splňuje rozpočtové omezení ekonomiky a má následující vlastnost: neexistuje žádná jiná alokace $\{\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}, \tilde{s}_t\}_{t=1}^\infty$, která splňuje rozpočtové omezení a

$$u(\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}) \geq u(c_{1t}, c_{2t+1}) \quad \forall \quad t \geq 1$$

s ostrou nerovností alespoň pro jeden případ ($t \geq 1$).

(Problémy: Může existovat PO steady-state, ale nikoliv cesta, která k němu vede. Máme dva steady-staty, které můžeme porovnat z hlediska blahobytu, ale ne z hlediska cesty, která k nim vede.)

Pareto zlepšující alokace (formálně)

Předpoklad, že ekonomika je ve steady statu (k^*). Provedeme realokaci, snížíme kapitálovou zásobu o $\Delta k^* < 0$ (dezinvestice).

$$k^{**} = k^* + \Delta k^*$$

Rozpočtové omezení (před změnou)

$$(1+n)k^* + c^* = y^* + (1-\delta)k^*$$

Rozpočtové omezení (po změně)

$$(1+n)k^{**} + c^{**} = y^{**} + (1-\delta)k^{**}$$

$$(1+n)(k^* + \Delta k^*) + c^{**} = y^* + f'(k^*)\Delta k^* + (1-\delta)(k^* + \Delta k^*)$$

Odečtením od sebe dostaneme

$$\Delta c^* = f'(k)\Delta k^* + (1-\delta)\Delta k^* - (1+n)\Delta k^*$$

$$\Delta c^* = [f'(k) - (n+\delta)]\Delta k^*$$

Pokud jsme za k_{gr} pak výraz $f'(k^*) - (n+\delta) < 0$, takže $\Delta c^* > 0$.

Pareto zlepšující alokace (intuitivně)

Sociální plánovač zavede následující transfer:

- sníží úspory mladých o jednotku $\Delta k = 1$ a dá je staré generaci (v období t)
- mladých je $(1 + n)$ krát starých, takže spotřeba starých se zvýší o $(1 + n)$.
- podobně, mladí až zestárnou dostanou také dodatečných $(1 + n)$ jednotek spotřeby.

Je tento transfer lepší?

- Mladí si mohou spotřít na stáří sami. Míra návratnosti $r = R - \delta = f'(k^*) - \delta$
- pokud je ekonomika dynamicky neefektivní, pak $f'(k^*) < (n + \delta)$, tzn. míra návratnosti tohoto transferu je vyšší než míra návratnosti soukromých úspor. Mladí budou tento transfer preferovat. (spotřeba v mládí nezměněna, ve stáří jim vzroste)

V OLG modelech jsou úspory jedním způsobem přesunu spotřeby do stáří (mladí musí spořit i když je míra návratnosti nízká). Může se stát, že ekonomika spoří příliš (a akumuluje moc kapitálu).

V Ramseyho modelu je agent „mladý“ (pracovník) a „starý“ (kapitalista) zároveň. Transfer probíhá implicitně mezi domácnostmi v každém období.

ALE, ale Pareto zlepšující alokace je možná pouze v případě, že je nekonečný počet generací. Předpokládejme poslední generaci T , která se narodí v T a žije jen toto období. Není zde potřeba úspor, spotřeba pouze v čase T .

$$U = u(c_{1T})$$

Rozpočtové omezení ekonomiky

$$c_T = f(k_T) + (1 - \delta)k_T$$

Snížení kapitálu způsobí pokles spotřeby

$$\Delta c_T = f'(k^*)\Delta k^* + (1 - \delta)\Delta k^*$$

$$\Delta c_T = [1 + f'(k^*) - \delta]\Delta k^* < 0$$

Na konci světa vezmeme od mladých v čase T , ale už jim nic nedáme v dalším období, protože další období neexistuje. Tato poslední generaci si pohorší. Není možné udělat Pareto zlepšující alokaci. I když můžeme zvýšit spotřebu všech předchozích generací, poslední generace ztratí.

Zdroj Pareto neefektivity. V první přednášce jsme měli, že konkurenční rovnováha je Pareto efektivní (platí 1. teorém blahobytu) při platnosti určitých podmínek (absence externalit atd.). Jednou z podmínek je i konečný počet agentů. Tady je nekonečný počet generací. To umožňuje sociálnímu plánovači provést efektivnější alokaci, která není dostupná trhu. Proto OLG modely mohou být Pareto neefektivní.

Jak dosáhnout snížení úspor?

- daň z kapitálu
- vládní dluh
- nefondový systém sociálního zabezpečení (Pay-As-You-Go)

Příklad PAYGo systému

Zjednodušená forma OLG modelu. Řešení v rámci dvou období, spotřeba když mladý a starý, c_1 a c_2 . Příjem mladého agenta je y , když je starý pouze si užívá důchodu a žije z úspor s (a úroku). Populace roste tempem n , výstup roste tempem g (technologický pokrok). Vláda zdaňuje mladé (τ) a starým vyplácí důchod b , má vyrovnaný rozpočet.

$$\max_{c_1, c_2, s} \log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

vzhledem k

$$c_1 + s = y(1 - \tau)$$

$$c_2 = (1 + r)s + b$$

$$b = (1 + n)(1 + g)\tau y$$

Spotřebitel profituje z toho, že když je starý, je kolem něj více mladých k zaplacení penze a tito lidé mají také větší příjem kvůli technologickému pokroku. Po dosazení

$$c_1 + s = y(1 - \tau)$$

$$c_2 = (1 + r)s + (1 + n)(1 + g)\tau y$$

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = (1 - \tau)y + \frac{(1 + n)(1 + g)\tau y}{1 + r} = Y(\tau)$$

Řešení (např. Lagrangianem, Eulerovka, dosazení do rozpočtového omezení)

$$c_1 = \frac{Y}{1 + \beta}$$

$$c_2 = \frac{\beta}{1 + \beta}(1 + r)Y$$

$$s = (1 - \tau)y - \frac{Y}{1 + \beta}$$

Jak tento systém ovlivňuje úspory? Úpravami poslední rovnice dostaneme

$$s = \frac{\beta y}{1 + \beta} - \frac{(1 + n)(1 + g) + \beta(1 + r)}{(1 + r)(1 + \beta)}\tau y$$

S rostoucím τ (větší PAYGo systém), soukromé úspory s klesají. Tzn. větší pay-as-you-go systém snižuje úspory, investice a tím i akumulaci kapitálu. Může tento systém zvyšovat blahobyť? A za jakých podmínek?

$$Y(\tau) = (1 - \tau)y + \frac{(1 + n)(1 + g)\tau y}{1 + r}$$

$$Y(\tau) = y - \tau y + \frac{(1 + n)(1 + g)\tau y}{1 + r}$$

$$Y(\tau) = y + \left[\frac{(1 + n)(1 + g)}{1 + r} - 1 \right] \tau y$$

$$(1 + n)(1 + g) > 1 + r$$

což je aproximativně

$$n + g > r$$

Populační růst plus růst důchodu (ekonomiky) je větší než míra návratnosti ze soukromých úspor. PAYGo systém dává smysl v některých zemích, s vysokým populačním růstem. Nyní ale moc ne (příklad Německo,

ale i jiné země) $n = 0\%$, $g = 2\%$, průměrný výnos z akciového trhu $r = 7\%$. Nutná reforma. Problém chybějící generace.

Empirické testování dynamické efektivity: U.S. růst ekonomiky + populační růst $n + g = 3\%$, výnos z vládních obligací $r = 1\%$. To naznačuje dynamickou neefektivnost. Ale pokud vezmeme data z národních účtů a porovnáme (čistý) mezní produkt kapitálu $f'(k) - \delta = R - \delta$ s růstem $n + g$ pak $R - \delta = 10\% > n + g = 3\%$. Podobně pro případ nejistoty: čistý kapitálový důchod $>$ investice. Ekonomika je dynamicky efektivní.