

# 1 Jednoduchý makroekonomický model

- Reprezentativní firma, reprezentativní domácnost
- optimalizace (maximalizace cílové funkce vzhledem k rozpočtovému omezení)
- mikro přístup k makroekonomii
- konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)
- nejprve statický model

## 1.1 Struktura modelu

- $N$  identických domácností
- 2 druhy statků: spotřeba ( $c$ ), volný čas ( $0 \leq \ell \leq 1$ )
- užitková funkce  $u(c, \ell)$
- $M$  identických firem
- 2 výrobní faktory: práce ( $n$ ), kapitál ( $k$ )
- agregátní zásoba kapitálu  $K$  je dána exogenně
- produkční funkce  $y = zf(k, n)$ , homogenní stupně 1
- tři trhy: výstupu/spotřeby, práce, kapitálu
- dvě relativní ceny: reálná mzda ( $w$ ), reálná nájemní cena kapitálu ( $r$ ), spotřební statek je *numeraire* s cenou 1
- všichni agenti jsou příjemci cen

## 1.2 Domácnosti

Maximalizují užitkovou funkci

$$U = u(c, \ell)$$

vybírají  $c$  a  $\ell$  vzhledem k rozpočtovému omezení

$$c = w(1 - \ell) + r(K/N) \tag{1}$$

a  $0 \leq \ell \leq 1$ ,  $c \geq 0$  a kde  $(1 - \ell)$  je nabídka práce. Každá domácnost vlastní stejný podíl  $K$ .

Lze řešit pomocí Lagrangiánu nebo dosazením rozpočtového omezení do užitkové funkce (neomezená optimalizace)

Řešením je podmínka optimality prvního řádu: mezní míra substituce (mezi volným časem a spotřebou) = reálná mzda

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = w \tag{2}$$

(1) a (2) lze vyřešit pro  $c$  a  $\ell$  jako funkce  $w$ ,  $r$  a  $K/N$ . (Vlastnosti užitkové funkce zajišťují, že existuje pouze jedno jediné řešení.)

### 1.3 Firmy

vybírají vstupy – práci a kapitál, aby maximalizovaly zisk ( $w$  a  $r$  berou jako dané)

$$\max_{k,n} [zf(k, n) - rk - wn]$$

Podmínky prvního řádu

$$zf_1(k, n) = r \quad (3)$$

$$zf_2(k, n) = w \quad (4)$$

Produkční funkce

$$y = zf(k, n)$$

kde  $z$  je exogenní šok v produktivitě má konstatní výnosy z rozsahu (homogenní stupně 1, platí Eulerův teorém)

$$\lambda y = zf(\lambda k, \lambda n) \quad (5)$$

$$zf(k, n) = zf_1(k, n)k + zf_2(k, n)n \quad (6)$$

rovnice (3), (4) a (6) implikují, že maximální zisk je 0. Z toho vyplývají dvě věci:

- Nemusíme se starat, jak je zisk firem distribuován (např. dividendy, podíly na zisku)
- Předpokládejme, že  $k^*$  a  $n^*$  jsou optimální množství výrobních faktorů. Pak musí platit

$$zf(k, n) - rk - wn = 0 \quad (7)$$

pro  $k = k^*$  a  $n = n^*$ . Ale (7) platí i pro  $k = \lambda k^*$  a  $n = \lambda n^*$ , kde  $\lambda > 0$  díky CRS.

Tím pádem není určena optimální velikost firmy, můžeme mít  $M = 1$  – jedna reprezentativní firma. (Počet firem je irelevantní pro definici konkurenční rovnováhy)

### 1.4 Konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)

Soubor množství  $c$ ,  $l$ ,  $n$ ,  $k$  a cen  $w$ ,  $r$ , které splňují tyto podmínky

1. Každá domácnost vybírá  $c$  a  $l$  optimálně při daných cenách  $w$  a  $r$  (rovnice 1 a 2)
2. Reprezentativní firma vybírá  $n$  a  $k$  optimálně při daných cenách  $w$  a  $r$  (rovnice 3, 4 a 5)
3. Trhy se čistí (chování domácností a firem je vzájemně konzistentní)

- trh práce

$$N(1 - \ell) = (M)n \quad (8)$$

- trh kapitálu

$$K = (M)k \quad (9)$$

- trh zboží

$$(M)y = Nc \quad (10)$$

Nabídka = poptávka. Přebytky poptávky na jednotlivých trzích jsou

$$Nc - y + w[n - N(1 - \ell)] + r[k - K].$$

Z (upraveného) rozpočtového omezení domácností (1) a podmínky nulového zisku (7) vyplývá, že přebytky na všech trzích jsou v součtu nulové.

$$Nc = w(1 - \ell)N + rK \quad \text{a} \quad y - rk - wn = 0$$

$$Nc - y + w[n - N(1 - \ell)] + r[k - K] = 0 \quad (11)$$

Pokud dvě ze tří podmínek (8, 9 a 10) platí, tak podle (11) platí i třetí podmínka.

**Walrasův zákon** – pokud je  $Q$  trhů a  $Q - 1$  je jich v rovnováze, pak i poslední trh je v rovnováze.

Využijeme Walrasův zákon. Máme 8 rovnic a 7 proměnných (neznámých)  $w, r, n, k, c, \ell$  a  $y$ . Můžeme 1 rovnici eliminovat, např. (9).

Problém si můžeme dále zjednodušit. Počet spotřebitelů je pro řešení irelevantní. Můžeme nastavit  $N = 1$  a analyzovat ekonomiku s jedním reprezentativním spotřebitelem – domácností. Konkurenční rovnováha (CE) má stejné vlastnosti jako když máme mnoho firem a spotřebitelů.

Řešíme jako systém rovnic, využijeme  $n = (1 - \ell)$

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = z f_2(k, 1 - \ell) = w \quad (12)$$

$$c = z f(k, 1 - \ell) \quad (13)$$

$$r = z f_1(k, 1 - \ell), \quad w = z f_2(k, 1 - \ell) \quad (14)$$

dosazením za  $c$  dostaneme

$$\frac{u_2(z f(k, 1 - \ell), \ell)}{u_1(z f(k, 1 - \ell), \ell)} = z f_2(k, 1 - \ell) \quad (15)$$

a vyřešíme pro  $\ell$  ( $k = k_0$  je dáno). Potom zpětně dosadíme do výše uvedených rovnic a získáme řešení pro  $r, w, n$  a  $c$ . Máme model, který umíme vyřešit a který můžeme studovat: co se stane, když ...

Výstup (na hlavu)  $y = z f(k, 1 - \ell)$  je určen

- kapitálovou zásobou ( $k$ )
- produktivitou ( $z$ )
- preferencemi pro volný čas ( $1 - \ell$ )

Příklad z Williamsona (růst produktivity).

## 1.5 Paretoovo optimum

je taková alokace,<sup>1</sup> že neexistuje jiná alokace, kterou by nějaký agent striktně preferoval a jakýkoliv jiný agent by si nepohoršil. uff!

My máme jen jednoho agenta :) Můžeme uvažovat o sociálním plánovači, který

<sup>1</sup>Plán produkce a distribuce statků mezi ekonomické agenty.

- určuje vstupy na výrobu reprezentativní firmě
- nutí spotřebitele nabízet náležité množství práce
- distribuuje statky spotřebitelům – tak aby na tom byl spotřebitel co možná nejlépe

Sociální plánovač určí Paretoovo optimum řešením následujícího problému

$$\max_{c, \ell} u(c, \ell) \quad \text{vzhledem k} \quad c = zf(k, 1 - \ell)$$

Můžeme řešit dosazením, výsledkem je

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = zf_2(k, 1 - \ell) \quad (16)$$

což je stejná rovnice jako v případě CE (competitive equilibrium – konkurenční rovnováha). CE je stejné jako Paretoovo optimum (řešení sociálního plánovače).<sup>2</sup>

## 1.6 Teorémy blahobytu (Welfare theorems)

Za určitých podmínek (definováno níže)

1. Konkurenční rovnováha je Pareto optimální (*První teorém blahobytu*)
2. Jakéhokoli Pareto optima může být dosaženo vhodným přerozdělením počátečního vybavení (zdrojů), (*Druhý teorém blahobytu*)

Podmínky: absence externalit, veřejných statků, rostoucích výnosů z rozsahu, asymetrických informací, distorzních daní, nutnost kompletních trhů.

### 1.6.1 Implikace:

- V makroekonomii, pokud vysvětlíme určitý jev (např. hospodářské cykly) pomocí modelu konkurenční rovnováhy, kde platí 1. WT  $\Rightarrow$  není prostor pro vládní intervence
- Rovnost CE a PO je dobrá z hlediska výpočetního. Je jednodušší získat řešení (CE), když vyřešíme problém SP a dostaneme rovnovážná množství a pak vyřešíme pro ceny (než řešení všeho zároveň)

## 1.7 Dynamická ekonomie

- Domácnosti se rozhodují, kolik spotřebují dnes a kolik ušetří.
- Žijí  $T$  období
- užitková fce je časově separabilní (2 krát diff, striktně rostoucí a striktně konkávní)

$$U[(c_0, \ell_0), (c_1, \ell_1), (c_2, \ell_2) \dots (c_T, \ell_T)] = u(c_0, \ell_0) + \beta u(c_1, \ell_1) + \beta^2 u(c_2, \ell_2) + \dots + \beta^T u(c_T, \ell_T)$$

$\beta \in (0, 1)$  je *diskontní faktor*, vyjadřující netrpělivost domácností ve spotřebě

Někdy se používá *diskontní míra*  $\rho$ , přičemž platí

$$\beta = \frac{1}{1 + \rho}$$

<sup>2</sup>Když  $u(\cdot; \cdot)$  je striktně konkávní a  $f(\cdot; \cdot)$  striktně kvazikonkávní, existuje jediné Pareto optimum a CE je také jediné.

Domácnosti jsou vybaveny aktivy (bondy – obligace),  $a_0 \geq 0$ .

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

Na začátku má domácnost aktiva  $a_0$ . A co na konci? Pokud může zemřít zadlužená, udělá to. Proto ji omezíme, aby  $a_{T+1} \geq 0$ . Ale domácnost nemá důvod něco nechávat dědicům, když ví, kdy umře, proto  $a_{T+1} = 0$ .<sup>3</sup> No-Ponzi game condition.

Maximalizační problém

$$\max_{c_t, a_{t+1}} \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, \ell_t)$$

vzhledem k

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

a  $c_t \geq 0$  a  $a_{T+1} \geq 0$ . Odvodíme nutné podmínky optimality (jsou i postačující). Řešíme pomocí Lagrangianu.

Podmínky prvního řádu (first order conditions, FOC) vzhledem k  $c_t$ ,  $c_{t+1}$  a  $a_{t+1}$  položíme rovny 0. Dosazením dostaneme

$$u_c(c_t, \ell_t) = u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})\beta(1 + r_{t+1})$$

Náklady z úspory jednotky spotřeby dnes = přínos vyšší spotřeby zítra.

Eulerova rovnice (mezní míra substituce = tržní úroková míra)

$$\frac{u_c(c_t, \ell_t)}{\beta u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

Stav, kdy spotřeba a úroková míra jsou v čase konstantní: steady-state,  $c_t = c_{t+1} = c$ ,  $r_t = r_{t+1} = r$ .

$$\frac{1}{1 + \rho} = \beta = \frac{1}{1 + r}$$

V steady-statu je  $\rho = r$ .

**Řešení:** Pro jednoduchost přijmeme předpoklad  $\ell_t = 0$ , tj. domácnost pouze pracuje. Rozpočtové omezení rozepíšeme pro  $t + 1$  a dosadíme do Eulerovy rovnice.

$$c_t = w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}$$

$$c_{t+1} = w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}$$

Eulerova rovnice

$$u_c[w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}] = \beta(1 + r_{t+1})u_c[w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}] \quad (17)$$

Ceny jsou dané  $\{w_t, r_t\}_{t=0}^T$ . Jediné proměnné, které potřebujeme určit jsou  $a_t$ ,  $a_{t+1}$ ,  $a_{t+2}$ . Rovnice (17) je diferenční rovnice druhého řádu (obecně nelineární).

Máme celkem  $T + 2$  rovnic: počáteční podmínku  $a_0$  a koncovou podmínku  $a_{T+1} = 0$  a  $T$  Eulerovek. Počet proměnných je také  $T + 2$ :  $\{a_t\}_{t=0}^{T+1}$ . Počet neznámých = počet rovnic. Bude to mít řešení a bude jediné, díky vlastnostem užitek a produkční funkce.

Vybereme konkrétní tvar užitek funkce, použijeme nějakou matematickou aproximaci (linearizace – naučíme se později) a systém rovnic můžeme vyřešit (nejlépe pomocí nějakého softwaru).

---

<sup>3</sup>Pro  $T = \infty$  je to složitější, později.