

# TEORIE EKONOMICKÉHO RŮSTU

S využitím materiálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

## 4 Solowův model a růstová ekonometrie

Základní literatura: Mankiw (1995), Mankiw, Romer and Weil (1992) (sections: I, II.A, III.A), Jones (2000), BSiM: 1.2.10-1.2.11, 10.1-10.2,10.5.

### 4.1 Predikce a výsledky Solowova modelu

#### 4.1.1 Kvalitativní predikce

- Míra úspor a populační růst:
  - Ovlivní růst HDP na hlavu v krátkém nikoliv v dlouhém období
  - Ovlivní steady statovou *úroveň*  $y^*$ .
- Podmíněná konvergence
- Pouze růst technologie ovlivní růst HDP na hlavu v dlouhém období
- Hospodářská politika je neúčinná vzhledem k růstu v dlouhém období

#### 4.1.2 Speciální případ: Cobb-Douglasova produkční funkce

- Když pracujeme s kvantitativními předpovědmi v Solowově modelu, je velmi výhodné (a běžné) používat speciální případ: Cobb-Douglasovu produkční funkci.
- S CD produkční funkcí je snadné najít steady statovou hodnotu  $y^*$  ( $y = Y/L$ ) (Make sure you are able to do this)

$$\left(\frac{Y(t)}{L(t)}\right)^* = T(t) \left(\frac{s}{n+x+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (1)$$

nebo v logaritmech

$$\ln(Y(t)/L(t))^* = \ln(T(0)) + xt + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n+x+\delta) \quad (2)$$

- Tato rovnice je vhodná pro ekonometrické testování (Proč jsou některé země chudé a jiné bohaté?)

- Mimo steady state je model charakterizován jednou diferenční rovnicí (7) z LN 2. S obecnou produkční funkcí se tato rovnice nedá explicitně vyřešit. Pokud však pracujeme s CD produkční funkcí, je řešení pomocí transformace poměrně snadné. Po zpětné transformaci dostaneme explicitní řešení pro vývoj  $k(t)$  a tím pádem  $y(t)$ . (Detaily viz. Jones (2000) a BSiM str. 44-45).
- Řešení nám poskytuje další náhled na dynamiku modelu. Navíc poskytuje kvantitativní předpovědi při testování na datech.
- Řešení je

$$y(t) \equiv Y(t)/L(t) = \left( \frac{s}{n+x+\delta}(1 - e^{-\beta t}) + \left( \frac{Y(0)}{L(0)A(0)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\beta t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} T(t) \quad (3)$$

- Klíčový parametr  $\beta \equiv (1 - \alpha)(n + x + \delta)$  určuje míru, jakou ekonomika konverguje k BGP (do steady statu).

### 4.1.3 Kvantitativní predikce

#### Rozdíly v míře úspor a populačním růstu

Mějme dvě země  $A$  a  $B$  které jsou totožné kromě rozdílů v míře úspor  $s_A$  a  $s_B$  a populačním růstu  $n_A$  a  $n_B$ .

Použitím (1), můžeme nalézt predikovaný vztah mezi steady statovými hodnotami HDP na hlavu,  $y_A^*$  a  $y_B^*$

$$\frac{y_A^*}{y_B^*} = \left( \frac{s_A}{s_B} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left( \frac{n_B + x + \delta}{n_A + x + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (4)$$

Tento vztah můžeme vidět i přímo z rovnice (4.3.2) po zderivování

$$dy^*/y^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} [ds/s - d(n+x+\delta)/(n+x+\delta)]$$

Jednoprocentní zvýšení míry růstu (snížení populačního růstu), zvýší steady statovou úroveň důchodu na hlavu o  $\alpha/(1-\alpha)$  procent.

#### Rychlost konvergence

Z rovnice (3) víme, že parametr  $\beta = (1 - \alpha)(n + x + \delta)$  určuje jak rychle se  $y(t)$  přibližuje steady statové úrovni  $y^*$ .

Parametr  $\beta$  se nazývá *rychlost konvergence*. (Podrobněji se jím budeme zabývat později.)

Všimněte si, že míra úspor neovlivňuje rychlost konvergence. Také vidíme, že opět stejné parametry jsou podstatné pro toto kvantitativní měřítko.

### Rozdíly v míře návratnosti kapitálu

Mezní produkt kapitálu

$$R = f'(k)$$

nebo

$$R = \alpha k^{-(1-\alpha)} = \alpha y^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

pro CD případ. Mějme opět země  $A$  a  $B$  s HDP na hlavu  $y_A$  a  $y_B$ . Model předpovídá, že vztah pro míry návratnosti kapitálu v těchto dvou zemích je

$$\frac{R_B}{R_A} = \left( \frac{y_A}{y_B} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (5)$$

Parametr  $\alpha$  je opět klíčový.

S obecnou produkční funkcí musíme tento výraz nahradit

$$\frac{dR}{R} = -\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma} \frac{dy}{y}$$

kde  $\sigma$  je elasticita substituce mezi kapitálem a prací. V CD případě je tato elasticita konstantní a rovna 1. Vyšší elasticita substituce tak bude predikovat nižší rozdíly v návratnosti pro dané rozdíly v HDP na hlavu.

## 4.2 Základní model a stylizovaná fakta

- Podíváme se, jak základní Solowův model vysvětluje hlavní empirická fakta: jak se liší důchod a ekonomický růst mezi zeměmi. Předpokládáme stejnou produkční funkci pro všechny země.
- Parametr  $\alpha$  hraje hlavní roli v rovnicích, které jsme odvodili výše. Připomeňme, že

$$\alpha = \frac{f'(k)k}{y} = \frac{F_K K}{Y} = \frac{RK}{Y} = \text{Capital's share of income}$$

- Je empirický fakt, že kapitálový podíl (capital's share of income) je přibližně  $1/3$ . Použijeme odhad  $\alpha = 1/3$  ke kalibraci rovnic a dostaneme kvantitativní měřítko velikosti vlivů.
- Většinu rovnic jsme odvodili pro speciální případ C-D produkční funkci. Ty platí (aspoň jako aproximace) i pro obecnou produkční funkci. Vyjímkou je vztah mezi  $y$  a  $R$ , kde se objevuje elasticita substituce mezi kapitálem a prací.

#### 4.2.1 Velikost rozdílů v důchodech

- $\alpha = 1/3$  znamená, že čtyřikrát větší úspory implikují pouze dvakrát větší úroveň důchodu na hlavu. My bychom ale potřebovali model, který je schopen vysvětlit rozdíly v důchodech (alespoň) desetinásobné. Takové hodnoty  $s$  a  $n$  potřebné k vysvětlení těchto rozdílů v datech nenajdeme.
- $\alpha/(1 - \alpha)$  musí být vyšší  $\Rightarrow$  potřebujeme vyšší  $\alpha$ !
- Alternativně: Výsledky v Mankiw, Romer and Weil (1992), section I, ukazují, že odhadnuté koeficienty u úspor a populačního růstu jsou příliš velké a nekorespondují s modelem. Kromě toho ekonometrický model moc nevysvětluje data (malé  $R^2$ ).

#### 4.2.2 Míra konvergence

- S  $\alpha = 1/3$ , a hodnotami  $n$  je 1 procento,  $x$  2 procenta a  $\delta$  3 procenta (ročně), dostaneme tempo konvergence  $\beta = 4$  procent.
- Pozorované tempo konvergence je přibližně 2 procenta  $\Rightarrow$  potřebujeme vyšší  $\alpha$ !

#### 4.2.3 Míra návratnosti (rate of return)

- S  $\alpha = 1/3$ , chudá země, kde je důchod  $1/10$  bohaté země by měla být míra návratnosti 100 krát vyšší než v bohaté zemi.
- Tento výsledek se může lišit, pokud  $\sigma > 1$ , což je celkem přijatelný předpoklad. Viz Mankiw (1995) page 287–288.
- I tak ale nepozorujem v datech nic takového a toky kapitálu z bohatých zemí do chudých jsou malé
- $\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}$  je příliš velký  $\Rightarrow$  potřebujeme vyšší  $\alpha$ !

## 4.3 Rozšířený Solowův model (s lidským kapitálem)

### 4.3.1 Přehodnocení kapitálu

- Neexistuje pouze fyzický kapitál.
- Úroveň lidského kapitálu podstatně vzrostla.
- Pokud přeformulujeme Solowův model, kde  $K$  bude širěji pojatý kapitál, dostaneme vyšší  $\alpha$ .
- Pokud zahrneme lidský kapitál do  $K$  musíme vzít v úvahu, že podstatný podíl mezd je vlastně odměna lidskému kapitálu pracovníků a tím pádem musí být zahrnuta v důchodech jdoucích pro  $K$ .
- Zvýšení  $\alpha$  je řešení všech tří problémů, kterými se zabývá Mankiw (1995).
- Formálně: Změníme produkční funkci, aby zahrnovala lidský kapitál

$$Y = K^\alpha H^\eta (TL)^{(1-\alpha-\eta)} \Rightarrow \hat{y} = \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta \quad (6)$$

- Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu (CRS) zachováme (součet exponentů je roven 1).
- Předpokládáme  $\alpha + \eta < 1$ , takže máme (stále) klesající výnosy z akumulovaných výrobních faktorů.
- Spotřební statky, fyzický kapitál a lidský kapitál jsou vyráběny stejnou produkční funkcí, tj. vyrábíme znalosti (dovednosti) stejně jako auta nebo počítače (později se k relevantnosti předpokladu jednosektorové produkční funkce vrátíme).
- Úspory můžeme použít k investicím do fyzického ( $K$ ) i lidského kapitálu ( $H$ ).
- Pro jednoduchost předpokládáme, že oba typy kapitálu deprecují stejnou mírou  $\delta$ . Základní rovnice Solowova modelu pak bude

$$\dot{\hat{k}} + \dot{\hat{h}} = s\hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (n + x + \delta) \cdot (\hat{k} + \hat{h})$$

- Rovnost míry návratnosti fyzického i lidského kapitálu požaduje, aby

$$\alpha \frac{\hat{y}}{\hat{k}} - \delta = \eta \frac{\hat{y}}{\hat{h}} - \delta \quad \Rightarrow \quad \hat{h} = \frac{\eta}{\alpha} \hat{k} \quad (7)$$

což implikuje, že existuje fixní vztah mezi  $\hat{k}$  a  $\hat{h}$ .

- Všimněte si, že tímto předpokladem dostaneme, že  $K$  a  $H$  se okamžitě přizpůsobí požadovanému poměru. (Přeměníme  $K$  do  $H$  a naopak). Je to přijatelné?
- Pomocí (7), můžeme přepsat základní rovnici na

$$\dot{\hat{k}} = sA\hat{k}^{\alpha+\eta} - (n+x+\delta)\hat{k}$$

kde  $A = \frac{\eta^n \alpha^{1-\eta}}{\alpha+\eta}$  je konstanta.

- Takže máme tu opět jednoduchou rovnici pro  $\hat{k}$  podobně, jak jsme měli v modelu pouze s fyzickým kapitálem. Jediný, ale podstatný rozdíl je, že  $\alpha$  is nahrazena  $\alpha + \eta$ . tj. jako bychom měli větší  $\alpha$  v základním (učebnicovém) modelu.
- Všimněte si, že můžeme celý systém charakterizovat jedinou rovnicí pro  $\hat{k}$ , protože změny v  $\hat{h}$  se vždy přizpůsobí změnám v  $\hat{k}$  podle (7).
- Proč zahrnutí lidského kapitálu zlepší predikce modelu?
  1. Rozdíly v míře úspor ovlivní, jak moc máme akumulovaného vstupu. Role akumulovaného vstupu je nyní větší (máme jak fyzický kapitál (elasticita  $\alpha$ ), tak i lidský kapitál (elasticita  $\eta$ )), a tím pádem dostaneme větší rozdíly v  $y$ .
  2. Konvergence je pomalejší. Intuitivně: existuje větší setrvačnost, protože máme širší základ pro kapitál. Formálně: klesající výnosy se dostavují pomaleji; produkční funkce je méně konkávní v akumulovaných vstupech ( $\alpha + \eta > \alpha$ ), takže se dostáváme do steady-statu pomaleji.
  3. Pro dané rozdíly v  $y$  dostaneme menší rozdíly v míře návratnosti, protože mezní produkt akumulovaného výrobního faktoru klesá pomaleji.

#### 4.3.2 Alternativní formulace, Mankiw-Romer-Weil

- Ve výše uvedené formulaci jsme předpokládali, že produkce se rozdělovala prostřednictvím investic mezi dva typy kapitálu tak, že jejich míry návratnosti se rovnaly.
- V dlouhém období je rovnost míry návratnosti opodstatněná. Ale možnost substituovat obě formy kapitálu  $H$  a  $K$  není vždy přijatelná.

- Z tohoto důvodu se podíváme na alternativní formulaci. Ta je důležitá také proto, že je použita ve významném článku Mankiw, Romer a Weil (1992), dále označováno MRW.
- Nyní předpokládáme, že je exogenní a fixní část důchodu  $s_k$  investována do fyzického kapitálu a podíl  $s_h$  je investován do lidského kapitálu.

Tedy:

$$\dot{\hat{k}} = s_k \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (n + x + \delta) \hat{k} \quad (8)$$

$$\dot{\hat{h}} = s_h \hat{k}^\alpha \hat{h}^\eta - (n + x + \delta) \hat{h} \quad (9)$$

- Tento systém je v zásadě stejný jako předtím, akorát nyní máme dvě dynamické rovnice a řešení je poněkud komplikovanější. Problémem je, zda existuje steady state a zda k němu systém konverguje.
- Uvažujme diagram v  $(\hat{k}, \hat{h})$  prostoru. Nakreslete křivky charakterizující hodnoty  $\hat{k}$  a  $\hat{h}$  pro které  $\dot{\hat{k}} = 0$ , a podobně pro případ, kdy  $\dot{\hat{h}} = 0$ . Ukažte, že skončíte v (jediném) bodě, kde se tyto dvě křivky protnou, tj. v steady statu.

- Steady state ( $\dot{\hat{k}} = \dot{\hat{h}} = 0$ ) je dán:

$$\hat{k}^* = \left( \frac{s_k^{1-\eta} s_h^\eta}{n + x + \delta} \right)^{1/(1-\alpha-\eta)} \quad (10)$$

$$\hat{h}^* = \left( \frac{s_k^\alpha s_h^{1-\alpha}}{n+x+\delta} \right)^{1/(1-\alpha-\eta)} \quad (11)$$

- Dosazením zpět do produkční funkce dostaneme rovnici pro důchod na hlavu ve steady statu jako:

$$\ln((Y(t)/L(t))^*) = \ln(T(t)) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\eta} \ln(s_k) + \frac{\eta}{1-\alpha-\eta} \ln(s_h) - \frac{\alpha+\eta}{1-\alpha-\eta} \ln(n+x+\delta) \quad (12)$$

což je obdoba rovnice pro model bez lidského kapitálu

- Tato log-lineární formulace je velmi výhodná pro empirickou práci, protože může být použita pro ekonometrický odhad (lineární regresní model).

## Reference

- [1] **Jones, Charles I**, A Note on the Closed Form Solution of the Solow Model, 2000. <http://elsa.berkeley.edu/users/chad/closedform.pdf>.
- [2] **Mankiw, N. Gregory**, The Growth of Nations, *Brookings Papers on Economic Activity*, 1995, 275-310.
- [3] **Mankiw, N. Gregory, Romed David and Weil, N. David**, A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, May 1992, 107 (2), 407-437.