Teorie ekonomického růstu

S využitím materiálů od Kåre Bævre, Department of Economics, University of Oslo

7 Endogenní úspory, Ramseyho model

Základní literatura: BSiM: 2 (kromě 2.6.7 and 2.7)
Doporučená literatura o teorii optimálního řízení: Obstfeld (1992)
Klasika: Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965)

7.1 Proč chceme endogenní úspory?

- Než začneme řešit, jak mít v Solowově modelu endogenní úspory, je dobré shrnout důvody, proč to děláme.
  - Přirozené zobecnění
  - Dostaneme bohatší komparativní statiku tj. můžeme se podívat, jak ekonomika reaguje na změny např. úrokové míry, daní atd.
  - Dostaneme bohatší popis přechodné dynamiky
  - Můžeme provést normativní soudy ohledně hospodářské politiky.
- Určitě si vzpomenete, že Solowův model nám dokáže říci něco zajímavého o krátkém období (tj. fáze přechodné dynamiky). Navíc, oživení zájmu o neoklasické modely (neo-classical revival) naznačuje, že krátké období je poměrně 'dlouhé'. To znamená, že než se ekonomika dostane do steady state, zabere to hodně času.
- Všechny tyto argumenty naznačují důležitost modelování této dynamiky.

7.2 Firmy maximalizující zisk a domácnosti maximalizující užitek

7.2.1 Domácnosti

- Máme H identických domácností. Tj. každá domácnost má velikost $L(t)/H$.
- Každá domácnost roste exogenní tempem n (které je identické růstu populace).

- Domácnosti se rozmnožují přes generace (dynastie).
- Jelikož jsou domácnosti identické, můžeme jejich počet normalizovat $H = 1$, tj. budeme uvažovat representativní domácnost. Pro jednoduchost předpokládáme $L(0) = 1$, takže

$$L(t) = e^{nt}$$

Preference domácností

- Současný člen domácnosti se snaží maximalizovat:

$$U = \int_{t=0}^{\infty} u(c(t))e^{nt}e^{-\rho t}dt \tag{1}$$

  kde $c(t)$ je úroveň spotřeby *každého* člena domácnosti (předpokládáme identické členy v domácnosti).
- Takzvaná funkce okamžitého užitku (felicity function) $u(c)$ udává užitek daného člena domácnosti ze spotřeby c v daném čase.
- Protože $L(t)$ je počet členů domácnosti a $c(t)$ je spotřeba každého člena domácnosti, užitková funkce je aditivní v užitku členů (jak současných, tak budoucích). Dále je aditivně separabilní v čase pro každého jednotlivce.
- Parametr ρ je konstantní (subjektivní) diskontní míra, tj. vyjadřuje netrpělivost členů domácnosti. Je *také* identický s diskontní mírou přes všechny generace, tj. současní členové domácnosti diskontují užitek budoucích generací.
- Všimněte si, že tato formulace předpokládá silnou formu altruismu v rámci rodinné dynastie a také určitou míru kardinalismu.
- Domácnosti mají dokonalé informace. Tj. vědí, jak vypadá budoucnost, neexistuje žádná nejistota.
- Předpokládáme $\rho > n$, takže U je dobře definovaná (konečná, když c je konstantní v čase).
- Užitková funkce $u(c)$ splňuje $u'(c) > 0$ a $u''(c) < 0$. Konkavita vyjadřuje touhu vyhlazovat spotřebu v čase.

Rozpočtové omezení

- Domácnosti mají aktiva ve formě kapitálu nebo půjček. Každý člen domácnosti dodává neelasticky jednu jednotku práce.
- Domácnosti jsou příjemci cen, tj. berou trajektorie cen $\{r(t), w(t)\}$ jako dané.
- V rovnováze se všechny trhy čistí, neexistuje žádný nevyužitý kapitál nebo práce.
- Takže máme

$$\frac{d(\text{Assets})}{dt} = r \cdot (\text{Assets}) + wL - cL$$

nebo s $a = \text{Assets}/L$ (aktiva na člena domácnosti)

$$\dot{a}(t) = w(t) + r(t)a(t) - c(t) - na(t) = w(t) - c(t) + a(t)(r(t) - n) \quad (2)$$

- Všimněte si, že toto je *dynamické* rozpočtové omezení, tj. platí vždy pro všechna t.
- Musíme také vyloučit možnost, že domácnost se zadluží navždy. Pokud bychom to neudělali, bylo by pro domácnost optimální platit spotřebu a splátku úroků dalším půjčováním. Požadujeme tedy

$$\lim_{t \to \infty} a(t) e^{-\int_0^t [r(v)-n]dv} \geq 0 \quad (3)$$

tedy čistá současná hodnota aktiv je asymptoticky nezáporná. Této podmínce se často říká no-Ponzi game condition (letadlové hry).

Maximalizace užitku

- Domácnost řeší optimalizační problém: maximalizace užitku (1) vzhledem k dynamickému rozpočtovému omezení (2) a podmínce (3) (Non-Ponzi game condition). (Formálně také vzhledem k podmínkám $c(t) \geq 0$ a $a(0) = a_0$).
- Tento problém se řeší v rámci teorie optimálního řízení.
- Poznámka: Této metodě nemusíte rozumět úplně. Pro nás bude dostatečné používat základní postup a naučit se ho modifikovat při změně problémů.

- Detailnější popis metody optimálního řízení najdete v Obstfeld (1992) případně BSiM A.3.
- Začneme sestavením (present value) Hamiltoniánu pro tento problém:

$$\mathcal{H}^{pv} = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \nu(t)[w(t) + (r(t) - n)a(t) - c(t)] \tag{4}$$

  Je to něco jako lagrangián ve statické optimalizaci, kde $\nu(t)$ hraje roli multiplikátoru. Všimněte si, že první část výrazu je funkce okamžitého užitku (v čase t) a druhá část je 'multiplikátor' krát dynamické omezení (pravá část). Změny v užitkové funkci nebo rozpočtovém omezení je pak jednoduché zahrnout modifikací Hamiltoniánu.

- Řešení problému je pak charakterizováno třemi podmínkami:

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial c(t)} = 0 \tag{5}$$

$$\dot{\nu}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial a(t)} \tag{6}$$

$$\lim_{t \Rightarrow \infty} [\nu(t) \cdot a(t)] = 0 \tag{7}$$

  První je poměrně známá a v zásadě stejná jako v případě Lagrangiánu (princip maxima – Maximum principle).

  Druhá je tzv. kostavová rovnice, protože je vztažena ke stavové proměnné (derivace Hamiltoniánu podle stavové proměnné). Kostavová proměnná ν (multiplikátor) může být interpretována jako stínová cena (při změně rozpočtu).

  Třetí podmínka je podmínka transversality (transversality condition). V zásadě říká, že není optimální skončit ('v nekonečnu') s nějakým hodnotným aktivem. Podmínka transevrsality je formálně důležitá, ale nebudeme se jí příliš zabývat v našich aplikacích.

- První dvě podmínky budou pro řešení nejdůležitější.
- Konkrétně dostaneme

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial c(t)} = 0 \Rightarrow \nu = u'(c)e^{-(\rho-n)t} \tag{8}$$

$$\dot{\nu}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial a(t)} \Rightarrow \dot{\nu} = -(r-n)\nu \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

derivací první podmínky a dosazením za ν dostaneme Eulerovu rovnici

$$r = \rho + \left[-\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} \right] \cdot \frac{\dot{c}}{c}$$

kde výraz v závorkách je koeficient relativní averze vůči riziku (inverze koeficientu mezičasové elasticity substituce).

- Běžnou praxí je pracovat se speciální formou užitkové funkce

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0 \tag{11}$$

Pro tuto užitkovou funkce je mezičasová elasticita substituce $1/\theta$, proto BSiM ji označují jako funkci s konstantní mezičasovou elasticitou substituce *constant intertemporal elasticity of substitution* (CIES). Mnohem častěji se však označuje jako CRRA (Constant Relative Risk Aversion) funkce, protože má konstatní relativnía averzi vůči riziku (constant relative risk aversion) rovnou θ.

- V tomto případě Eulerova rovnice vypadá následovně

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \rho}{\theta} \tag{12}$$

- Nyní je interpretace názornější: spotřeba (na hlavu L) roste, když je reálná míra návratnosti vyšší než míra s jakou domácnosti diskontují budoucí spotřebu (v této situaci jednotlivec spoří a spotřeba *roste*). Dále, čím menší je θ tím více jsou jednotlivci ochotni substituovat spotřebu v čase, aby využili rozdílu mezi $r(t)$ a ρ.

7.2.2 Firmy

- V modelu je mnoho identických firem, které vyrábějí produkt pomocí neoklasické produkční funkce $Y = F(K, TL)$.
- Opět se budeme zabývat jednou reprezentativní firmou.
- Parametr vyjadřující technologii T je dán exogenně a roste tempem x. Počáteční úroveň můžeme normalizovat $T(0) = 1$.
- Firmy najímají kapitál a práci od domácností.
- Firm jsou cenovými příjemci na trzích s výrobními faktory, tj. přizpůsobí se daným cenám $\{r(t), w(t)\}$.

- Firmy mají dokonalé informace. Maximalizují zisk.
- Jelikož jsou kapitál a aktiva (půjčky) dokonalými substituty jako uchovatelé hodnoty, musí platit podmínka $r = R - \delta$ nebo $R = r + \delta$.
- Zisk reprezentativní firmy v daném čase je

$$\Pi = F(K, TL) - (r + \delta)K - wL$$

nebo po převedení na efektivní pracovníky

$$\frac{\Pi}{TL} = \hat{\pi} = [f(\hat{k}) - (r + \delta)\hat{k} - we^{-xt}]$$

- Protože zde nemáme žádné náklady přizpůsobení (tj. to, co firma udělá dnes neovlivní její aktivitu (náklady) v budoucnu) maximalizuje firma ziskovou funkci v každém časovém období.
- Dostáváme obvyklé podmínky prvního řádu

$$f'(\hat{k}) = r + \delta \tag{13}$$
$$w = [f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt} \tag{14}$$

a v rovnováze neexistuje zisk (pro všechny hodnoty TL).

7.3 Rovnováha

- V rovnováze musí být všechny dluhy vyrovnány, takže $a = k$.
- Dosazením $a = k$ a cen výrobních faktorů do rozpočtového omezení domácností dostaneme (po převedení na efektivnostní jednotky)

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k} \tag{15}$$

- To je v podstatě stejná základní rovnice pro vývoj kapitálu jako v Solowově modelu
- Rozdílem je, že člen pro hrubé úspory je nyní $f(\hat{k}) - \hat{c}$ místo $sf(\hat{k})$ (všimněte si, že $f(\hat{k}) - \hat{c}$ implikuje $s(\hat{k})f(\hat{k})$, tj. míra úspor se mění s $\hat{k}$).
- Takže musíme také popsat chování $\hat{c}$, abychom měli plný popis modelu.

- To odvodíme z Eulerovy rovnice, která po dosazení za $r(t)$ a převedením na efektivní jednotky vypadá následovně

$$\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - x = \frac{f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x}{\theta} \tag{16}$$

- Dvě základní rovnice (15) a (16), společně s počáteční podmínkou $\hat{k}(0)$ a podmínkou transversality určí trajetkorie vývoje $\hat{k}$ a $\hat{c}$, které potřebujeme k plnému popisu ekonomiky.

- Do grafu, kde na osách jsou $(\hat{k}, \hat{c})$, vykreslíme křivky vyjadřující $\dot{\hat{k}} = 0$ a $\dot{\hat{c}} = 0$. Tomuto grafu se říká fázový diagram. Ukazuje nám existenci sedlových cest (saddle-path) a steady statu.

- Můžeme použít fázový diagram ke komparativní statice. Všimněte si, že podél x-ové osy (s $\hat{k}$) dostáváme pouze postupné změny (žádné skoky). (Kromě případu, kdy dochází k exogenní změně, která posune $\hat{k}(t)$ přímo.)

7.4 Dlouhé období a Solowův model

- Hlavní závěry týkající se dlouhého období jsou stejné jako dříve: dosáhneme steady statu, kde $\dot{\hat{k}} = 0$ a $\dot{\hat{c}} = 0$.

- Takže z tohoto pohledu nám Ramseyho model nic nového neřekne o tom, co se děje v dlouhém období.

7.5 Podmínka transversality

- Když jsme řešili model a optimalizaci spotřebytelů, poněkud jsme opomíjeli podmínku transversality, tj.

$$\lim_{t\to\infty}[\nu(t)\cdot a(t)] = 0$$

- Vzpomeňte si na interpretaci: když ν je (současná) stínová cena/hodnota $a(t)$, pak nám podmínka říká, že hodnota aktiv domácností $(\nu(t)\cdot a(t))$ se musí asymptoticky blížit 0. Jinými slovy: domácnosti neplánují, že jim zůstane nejaké hodnotné aktivum na konci jejich časového horizontu (v nekonečnu).

- Opomenutí této podmínky není v našich aplikacích klíčové. Ale neměli bychom zapomneout, že je tato podmínka při formálním řešení klíčová a v některých případech může mít velký vliv na výsledky.

- Předpoládejme, že máme konečný časový horizont. Domácnost by tedy měla spotřebovat všechen zbývající kapitál v posledním období. Tím bychom dostali řešení mimo sedlovou cestu a skončili bychom na vertikální ose.

- Vzpomeňte si, že

$$\dot\nu(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}^{pv}}{\partial a(t)} \Rightarrow \dot\nu = -(r-n)\nu$$

nebo

$$\nu(t) = \nu(0)\cdot\exp\left\{-\int_0^t [r(v)-n]dv\right\}$$

což nám dá podmínku transversality v podobě

$$\lim_{t\to\infty}\left[a(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t [r(v)-n]dv\right\}\right] = 0 \tag{17}$$

- Po dosazení $a = k$, $\hat{k} = ke^{-xt}$, a $r(t) = f'(\hat{k}) - \delta)$ dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\left[\hat{k}(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t [f'(\hat{k})-\delta-x-n]dv\right\}\right] = 0 \tag{18}$$

- Když se dostaneme do steady statu $\hat{k}^*$, musí platit

$$f'(\hat{k}^*) - \delta > x + n$$

tj. steady statová míra návratnosti je větší než $n + x$, steady statové tempo růstu K.

- Vzpomeňte si také, že (z podmínky $\dot{\hat{c}} = 0$) platí

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$$

- To znamená, že podmínka transversality může být splněna pouze pokud

$$\rho > n + (1 - \theta)x \tag{19}$$

  tj. pokud je domácnost dostatečně netrpělivá (ve vztahu k populačnímu růstu a technologickému pokorku).

- My se budeme zabývat pouze případy, kdy (19) je splněna.

7.6 Konvergence

- Viděli jsme, že i v modelu s optimalizujícími domácnostmi dostaneme konvergenci do steady statu $\hat{k}^*$.

- V přechodu do steady statu $\hat{k}$ poroste (předpokládáme, že začínáme pod ním). Takže ekonomický růst bude v krátkém období rychlejší než v dlouhém, stejně jako v Solowově modelu.

- Ale už není tak zřejmé, že $\gamma_{\hat{k}}$ bude klesat monotóně během přechodné fáze stejně jako v Solowově modelu (nemáme jednoznačný fázový diagram $(\hat{k}, \gamma_{\hat{k}})$, který jsme používali v Solowovi).

- Přesto se dá ukázat (důkaz v BSiM 2.11), že $\gamma_{\hat{k}}$ bude také monotóně klesat. Takže dostáváme opět podmíněnou β-konvergenci.

- A co rychlost konvergence?

- Teď je daleko těžší log-linearizovat vývoj γ_y, protože máme dynamiku jak k tak i c (viz BSiM 2.8). Parametr β je nyní poměrně složitá funkce parametrů modelu a je daleko těžší určit přijatelné hodnoty podobně jak v Solowovi.

- Alternativní způsob je odvodit rychlost konvergence z numerických simulací kalibrovaného modelu, pro přijatelné hodnoty parametrů (viz BSiM pp. 113–118).

- Novým klíčovým parametrem, který ovlivňuje rychlost konvergence je nyní θ, tj. inverzní hodnota mezičasové elasticity substituce.

- Čím vyšší je θ, tím více chtějí domácnosti vyhlazovat spotřebu. Takže domácnosti budou málo investovat a sedlová cesta bude ležet blíže k lokusu $\hat{k} = 0$. Malá ochota investovat znamená pomalejší přechod a tím pádem nízkou rychlost konvergence.

- Mezičasová elasticita substituce je také podstatná pro vývoj míry úspor v závislosti na $\hat{k}$. V případě CD funkce se dá ukázat (viz BSiM 2.6.4) že buď klesá monotóně, když $s^* < 1/\theta$ nebo roste monotóně, když $s^* > 1/\theta$. (s^* je steady statová míra úspor a je dána parametry modelu $s^* = \alpha(x + n + \delta)/(\delta + \rho + \theta x)$).

- Speciální případ nastane pro $s^* = 1/\theta$, kdy se Ramseyho model chová stejně jako Solowův model, což celkem sedí pro určitou kombinaci přijatelných parametrů.

8 Hospodářská politika v neoklasickém modelu

Základní literatura: BSiM: 3.1, 4.1

8.1 Optimální růst a zlaté pravidlo

- Pokud se vrátíme k Solowově modelu s fixní mírou úspor, dostaneme vývoj spotřeby jako:

$$\hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (n + x + \delta)\hat{k}^*$$

kde $\hat{k}^* = \hat{k}^*(s, n, x, \delta)$. Derivací dostaneme:

$$\frac{\partial \hat{c}^*}{\partial s} = [f'(\hat{k}^*(s, n, x, \delta)) - (n + x + \delta)]\frac{\partial \hat{k}^*(s, n, x, \delta)}{\partial s} \tag{20}$$

Maximalizací $\hat{c}^*$ dostaneme úroveň kapitálu $\hat{k}_{GR}$, při které platí:

$$f'(\hat{k}_{GR}) = n + x + \delta \tag{21}$$

Tato zásoba kapitálu $\hat{k}_{GR}$ se nazývá úroveň kapitálu dle zlatého pravidla (*golden-rule* level of the capital stock).

- V Ramseyho modelu jsme viděli, že steady statová úroveň kapitálu je dána

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x \tag{22}$$

ale díky (19) dostáváme $\rho + \theta x > n + x$. Jelikož $f'' < 0$ musí platit podmínka

$$\hat{k}^* < \hat{k}_{GR}$$

- Proč? Domácnosti jsou netrpělivé a chtějí spotřebovávat během přechodu do steady statu.
- Proto se podmínka (22) někdy nazývá modifikované zlaté pravidlo.
- To je také důvodem, pro vždy kreslíme lokus $\dot{\hat{c}} = 0$ nalevo od vrcholu lokusu $\dot{\hat{k}} = 0$.
- Všimněte si, že nikdy nemůžeme dostat dynamickou neefektivnost (příliš mnoho naspořeného kapitálu).
- Ale je to sociálně optimální?

8.2 První teorém blahobytu

- Zatím jsme se zabývali Ramseyho modelem v decentralizované ekonomice. Nyní se podáváme, jak by alokoval zdroje sociální plánovač.
- Jelikož máme jen jednu reprezentativní domácnost, maximalizuje sociální plánovač funkci

$$U = \int_{t=0}^{\infty} u(c(t)) e^{nt} e^{-\rho t} dt \tag{23}$$

- Rozpočtové omezení sociálního plánovače je (uvažujeme uzavřenou ekonomiku bez možnosti zahraničního zadlužení, takže $a(t) = k(t)$)

$$\dot{\hat{k}}(t) = f(\hat{k}(t)) - c(t)e^{-xt} - \hat{k}(t)(\delta + x + n) \tag{24}$$

- Všimněte si rovnosti rozpočtového omezení domácností v rovnováze (tj. rovnice (15)) a rozpočtového omezení ekonomiky (24).
- Sociální plánovač maximalizuje (23) vzhledem k (24). Hamiltonián pro tento problém je

$$\mathcal{H}^{pv} = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \nu(t)[f(\hat{k}(t)) - c(t)e^{-xt} - \hat{k}(t)(\delta + x + n)] \tag{25}$$

- Řešením je potom

$$\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial c(t)} = 0 \Rightarrow \nu = u'(c)e^{-(\rho-n-x)t} \tag{26}$$

$$\dot{\nu}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^{pv}}{\partial \hat{k}(t)} \Rightarrow \dot{\nu} = -[f'(\hat{k}) - (\delta + x + n)]\nu \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

- A dostaneme Eulerovu rovnici:

$$\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - x = \frac{f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x}{\theta} \tag{29}$$

  která je identická s rovnicí, kterou jsme odvodili pro decentralizovanou ekonomiku.

- Sociální plánovač vybere stejné řešení (alokaci) stejně jako v decentralizovaném případě. Tím pádem je konkurenční rovnováha Pareto efektivní. To je velmi důležitý závěr.

- Tento výsledek pramení z prvního teorému blahobytu, který říká, že konkurenční rovnováha je Pareto efektivní v případě absencí externalit a s kompletními trhy.

8.3 Vláda v Ramseyho modelu

- Nyní zavedeme do modelu vládu, která vybírá daně a nakupuje statky a služby.

- Nejdříve budeme předpokládat, že domácnosti a firmy nemají z vládní spotřeby žádný užitek. V tomto smyslu jsou vládní nákupu jako vyhazování zdrojů.

- Předpokládáme, že vláda má vyrovnaný rozpočet (není zde možnost veřejného dluhu):

$$G + V = \tau_w wL + \tau_a r \cdot \text{(assets)} + \tau_c C + +\tau_f \cdot \text{(firm's earnings)}$$

  kde τ_i jsou daně, G vládní výdaje a V jsou transfery domácnostem.

- Rozpočtové omezení domácnosti (na hlavu)

$$\dot{a} = (1 - \tau_w) \cdot w + (1 - \tau_a) \cdot ra - (1 + \tau_c) \cdot c - na + v$$

- Nahrazením původního rozpočtového omezení se jednoduchým postupem propracujeme k Eulerove rovnici:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{(1-\tau_a)r - \rho}{\theta} \tag{30}$$

tj. daň z výnosů z aktiv je jediný faktor, který ovlivňuje mezičasové rozhodování domácností a vstupuje zde jako snížení úrokové míry r.

- Pro firmy nyní platí, že zisk po zdanění je

$$\text{after tax profit} = (1-\tau_f)\cdot[F(K,TL) - wL - \delta K] - rK$$

což nám dává podmínku prvního řádu

$$f'(\hat{k}) = \frac{r}{1-\tau_f} + \delta$$

takže vyšší τ_f požaduje vyšší mezní produkt kapitálu.

- Stejně jako dříve platí

$$w = [f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})]e^{xt}$$

- Aplikací stejného postupu jak dříve dostaneme vývoj $\hat{k}$ v rovnováze jako

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k} - \hat{g} \tag{31}$$

tj. shoduje se s celkovým rozpočtovým omezením ekonomiky.

- Eulerova rovnice chrakterizující vývoj spotřeby v rovnováze je

$$\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} = \frac{(1-\tau_a)\cdot(1-\tau_f)\cdot(f'(\hat{k}) - \delta) - \rho - \theta x}{\theta} \tag{32}$$

- Všimněte si, že daně ze mzdy a spotřeby jsou zde paušálními daněmi a neovlivňují vývoj spotřeby v čase. Důvodem je, že nabídka práce je zde fixní, a že konstantní proporcionální daň ze spotřeby neovlivní relativní cenu spotřeby v různých časech.

- Daně z úroků z aktiv a daně z výdělků firem ovlivní spotřebu snížením úrokové míry a tím pádem sníží motivaci spořit a investovat (posun lokusu $\dot{\hat{c}} = 0$ doleva). Vyšší τ_a a/nebo τ_f tím pádem snižuje $\hat{k}^*$.

- Neočekávaný a permanentní růst vládní spotřeby posune lokus $\dot{\hat{k}} = 0$ dolů a výsledkem je skok na novou sedlovou cestu, která je konzistentní s novým steady statem. Pokud byla ekonomika původně ve steady statu, skočí přímo do nového steady statu. Snížení spotřeby bude přesně odpovídat částce, o kterou se zvýšili vládní výdaje $\hat{g}$, soukromá spotřeba byla plně vytěsněna vládní spotřebou.

9 Investice a úspory v otevřené ekonomice

Základní literatura: BSiM:3.2-3.4

9.1 Rozšířený model

- Opět budeme uvažovat rozšířenou produkční funkci

$$Y = K^{\alpha} H^{\eta} (TL)^{(1-\alpha-\eta)} \Rightarrow \hat{y} = f(\hat{k}, \hat{h}) = \hat{k}^{\alpha} \hat{h}^{\eta}$$

- Reprezentativní firma má zisk:

$$\pi = TL[f(\hat{k}, \hat{h}) - R_k \hat{k} - R_h \hat{h} - we^{-xt}]$$

  kde R_k je nájemní cena fyzického kapitálu a R_h je nájemní cena lidského kapitálu.

- Maximalizace současné hodnoty cash flow je rovna maximalizace zisku v každém období, protože neexistují žádné náklady přizpůsobení.

- Firma tedy najme tolik vstupů, aby mezní přínos byl roven nájemním cenám:

$$R_k = \frac{\partial f(\hat{k}, \hat{h})}{\partial \hat{k}} = \alpha y / k \tag{33}$$

$$R_h = \frac{\partial f(\hat{k}, \hat{h})}{\partial \hat{h}} = \eta y / h \tag{34}$$

$$w = \left[\hat{y} - R_k \hat{k} - R_h \hat{h}\right] e^{xt} = y - R_k k - R_h h \tag{35}$$

- Dynamické rozpočtové omezení domácnosti (na hlavu) je

$$\dot{a} = \dot{h} + \dot{k} - \dot{d} = w + (R_k - \delta - n)k + (R_h - \delta - n)h - (r - n)d - c \tag{36}$$

  kde $d = k + h - a$ je dluh (na hlavu).

- Budeme se držet jednosektorové produkční technologie, kde výstupu se může přeměnit jedna ku jedné na spotřebu, fyzický kapitál nebo lidský kapitál. Tj. jednotky k mohou být okamžitě a plně zaměněny za jednotky h a naopak.

- Navíc stále předpokládáme, že jak zásoba kapitálu, tak aktiva (půjčky) jsou dokonalými substituty jako uchovatelé hodnot. Musíme tedy mít

$$r = R_k - \delta = R_h - \delta \tag{37}$$

- Jak jsme viděli v části 4.2.1, implikuje to $k/h = \alpha/\eta$. Bez nákladů přizpůsobení domácnosti okamžitě nastaví poměr kapitálu na tuto úroveň a nebudou ji měnit.

- Takže stejně jak jsme ukázali dříve můžeme zjednodušit problém zadefinováním kapitálu v širším pojetí $z = k + h$. Což po dosazení za $r = R_k - \delta = R_h - \delta$, dává rozpočtové omezení

$$\dot{a} = \dot{z} - \dot{d} = w + (r - n)(z - d) - c = w + (r - n)a - c$$

  Zatímco produkční funkce může být přepsána jako $\hat{y} = B\hat{z}^{\alpha+\eta}$ kde $B = \alpha^\alpha \eta^\eta (\alpha + \eta)^{-(\alpha+\eta)}$.

- Protože $k/h = \alpha/\eta$ v každém okamžiku během přechodu, k a h porostou stejným tempem jako z.

- Výběr firem ohledně k a h neovlivní rozhodnutí domácností, protože ty dodávají neelasticky jakýkoliv kapitál, který vlastní, a firmy jej poptávají.

- Ve stručnosti: model rozšířený o lidský kapitál se chová stejně jako původní model, pouze fyzický kapitál k je nahrazen šířeji pojatým kapitálem z. Co je důležité: podíl (rozšířeného) kapitálu na důchodu je nyní větší než v případě fyzického kapitálu ($\alpha + \eta$ místo α)

- $\alpha + \eta$ tak přebírá roli α ve výrazu pro rychlost konvergence. Produkční funkce je méně konkávní, výnosy z akumulovaného vstupu klesají pomaleji a tím pádem i konvergence je pomalejší.

9.2 Konvergence do steady statu v otevřené ekonomice

- To co zajišťuje konvergenci je klesající mezní produkt z akumulovaných vstupů. Jelikož úroková míra v uzavřené ekonomice klesá během přechodné fáze, ovlivňuje to zpětně výběr h a k a zajišťuje to konvergenci do steady statu.

- V malé otevřené ekonomice světová úroková míra r^w určuje domácí úrokovou míru r.
- Pro jednoduchost uvažujem, že r^w je konstantní. (např. protože 'svět' se nachází ve steady statu.)
- Ale když $r^w = r = R_k - \delta = R_h - \delta$ pak z podmínek (33) a (34) plyne, že také h a k musí být konstantní. Takže otevřená ekonomika okamžitě skočí na úroveň h a k, která je ve shodě s touto úrovou mírou. Tj. skočí rovnou do steady statu.
- Toto okamžité přizpůsobení může být dosaženo kvůli možnosti půjčit (si) na mezinárodním trhu, tj. přizpůsobením d. V otevřené ekonomice již nejsou investice určeny domácími úsporami a změny k a h už nezávisí na dostupných zdrojích, které zbyly po spotřebě.
- Takže model předpovídá, že v malé otevřené ekonomice bychom měli pozorovat rychlost konvergence rovnou nekonečnu (nekonečně rychlá).
- V tomto modelu neexistuje žádná přechodáná dynamika. Neexistuje žádné krátké období.
- Jelikož je Ramseyho model schopný nám řici něco nového o růstu v přechodné fázi, znamená to, že jeho otevřená verze je zbytečná a neoklasický model je nezajímavý pro vysvětlení růstu? Ne úplně.

9.3 Problémy s modelováním otevřené ekonomiky

- V světe nepozorujeme nic takového jako nekonečně rychlou konvergenci. Takže, co je špatně s Ramseho modelem v otevřené verzi?
- Eulerova rovnice charakterizující mezičasové rozhodování domácností je

$$\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)} = \frac{r^w - \rho - \theta x}{\theta} \tag{38}$$

- Vzpomeňte si, že pro uzavřenou ekonomiku ve steady statu platí $r = \rho + \theta x$. Co když se světová úroková míra odlišuje od této hodnoty, například protože v ostatních zemích mají jiné preference?

- Pokud $r^w > \rho+\theta x$ potom domácí (malá otevřená) ekonomika bude akumulovat aktviva nekonečně dlouho a nakonec bude porušen předpoklad, že se jedná o *malou* otevřenou ekonomiku (tj. která neovlivní r^w).
- Pokud $r^w < \rho+\theta x$, tj. domácí ekonomika je dostatečně netrpělivá. Pak se dá ukázat (viz BSiM pp. 163-164), že bude chtít spotřebovat nyní tolik, že na to obětuje veškerou budoucí spotřebu (c půjde asymptoticky k 0), a toho dosáhne zadlužením – zastaví veškerý kapitál a budoucí pracovní příjmy.
- Tyto predikce nedávají moc smysl.
- Je zde několik důvodů, proč model selhává:
  1. Omezení na mezinárodní úvěr, tj. omezení na d
  2. Náklady přizpůsobení kapitálu
  3. Existuje silná vazba mezi domácími úsporami a domácími investicemi dokonce i v otevřených ekonomikách (Feldstein-Horioka puzzle).
  4. Agents mohou činit rozhodnutí v konečném horizontu.
  5. Agentům se mohou měnit preference v čase.
- Budeme se zabývat pouze prvními třemi body, ale jen zběžně. (BSiM 3.5-3.6 diskutuje poslední dva, které jsou však pro nás navíc.)
- Je dobré říci, že současný výzkum tyto problémy neumí dostatečně vysvětlit.

9.4 Omezení na mezinárodní úvěr

- Přijatelné omezení na úroveň zahraničního dluhu je

$$d \leq k$$

- To znamená, že fyzický kapitál se může používat jako zástava (collateral) při půjčování si, zatímco lidský kapitál nikoliv.
- Z opačného pohledu to znamená, že cizinci nemohou vlastnit lidský kapitál či práci v domácí ekonomice. Toto omezení je tedy relevantní i pro přímé zahraniční investice.
- Přijatelný předpoklad? Fyzický kapitál může snadněji měnit vlastníka a být monitorován.

- Pokud $k(0) + h(0) - d(0) \geq h^*$ není omezení na úvěr závazné, proto se zaměříme na případ $k(0) + h(0) - d(0) < h^*$.
- V tomto případě již obě formy kapitálu nejsou dokonalými substituty a tak podmínka (37) nemusí platit.
- Avšak a a k jsou stále dokonalými substituty co se týče uchování hodnoty, takže musí platit:

$$r^w = R_k - \delta \;\Rightarrow\; k/y = \alpha/(r^w + \delta)$$

  Takže poměr kapitálu k výstupu k/y je konstantní (což je ve shodě s jedním ze stylizovaných faktů o ekonomickém růstu, publikovaným ve slavném článku Kaldor (1961)).
- Dosazením do produkční funkce dostaneme:

$$\hat{y} = \tilde{B}\hat{h}^{\epsilon} \tag{39}$$

  kde $\tilde{B} = [\alpha/(r^w + \delta)]^{\alpha/(1-\alpha)}$ a $\epsilon = \eta/(1-\alpha)$. Všimněte si, že $\alpha + \eta < 1$, a $0 < \epsilon < \alpha + \eta < 1$.
- Pokud dosadíme za mzdu w do rozpočtového omezení (36) dostaneme

$$\dot{a} = y - (r+\delta)(k+h-a) - (n+\delta)a - c = y - (r+\delta)d - (n+\delta)a - c \tag{40}$$

  nebo

$$\dot{\hat{a}} = \hat{y} - (r+\delta)\hat{d} - (n+\delta+x)\hat{a} - \hat{c} \tag{41}$$

- Když je omezení na úvěr závazné (platí jako rovnost), máme $d = k$ (to implikuje $a = h$), což nám dává

$$\dot{\hat{a}} = \hat{y} - (r+\delta)(\hat{k}) - (n+\delta+x)\hat{h} - \hat{c} \tag{42}$$

- Nakonec dosazením za $\hat{y}$ z rovnice (39) a použitím vztahu $k/y = \alpha/(r^w + \delta)$ dostaneme

$$\dot{\hat{h}} = (1-\alpha)\tilde{B}\hat{h}^{\epsilon} - (n+\delta+x)\hat{h} - \hat{c} \tag{43}$$

- Všimněte si, že výraz, který odečítáme $\alpha\hat{y} = \alpha\tilde{B}h^{\epsilon}$ jsou platby cizincům za pronájem fyzického kapitálu. Jsou to vlastně čisté platby výrobním faktorům stejně jako když upravujeme HDP na HNP.

- Když se nyní podíváme na optimalizační problém z hlediska representativního spotřebitele-výrobce, uvidíme, že maximalizuje užitek vzhledem k (43). To je hodně podobné problému, který jsme měli v původní formulaci Ramseyho modelu pro uzavřenou ekonomiku (s nebo bez lidského kapitálu).

- Jediným rozdílem je, že h přebírá roli akumulovaného faktoru (místo k nebo z), podíl odměn na důchodu u tohoto faktoru je nyní ϵ (místo α nebo $\alpha + \eta$) a máme zde konstantu $(1 - \alpha)\tilde{B}$ (místo 1 nebo B).

- Řešení je v podstatě stejné jako v modelu uzavřené ekonomiky se sedlovou cestou popisující přechod do steady statu.

- Míra konvergence je konečná i v otevřené ekonomice, ale je vyšší než v uzavřené (s lidským kapitálem) protože $\epsilon < \alpha + \eta$.

- Všimněte si, že v uzavřené ekonomice k/h bylo fixní, zatímco zde klesá během přechodu do s.s.

- Při výpočtu rychlosti konvergence se ukazuje, že rozdíl mezi uzavřenou a otevřenou ekonomikou není až tak velký. Ve skutečnosti celkem odpovídá rychlosti konvergence, kterou pozorujeme v datech.

9.5 Investice s náklady přizpůsobení

- Existuje několik důvodů, proč je nákladné změnit zásobu kapitálu.

- Zaměříme se na vnitřní náklady přizpůsobení: tj. nové stroje musí být instalovány, pracovníci musí být zaškoleni atd.

- Pro jednoduchost se vrátíme k modelu pouze s fyzickým kapitálem.

- Hlavním rozdílem je, že nyní reprezentativní firma čelí problému

$$\text{Cost of investment} = I \cdot [1 + \phi(I/K)]$$

  kde $\phi' > 0$ odráží náklady přizpůsobení kapitálu, nebo lépe řečeno náklady přizpůsobení hrubých investic. Předpokládáme, že náklady závisí úměrně vůči celkové zásobě kapitálu (I/K). Také předpokládáme, že $\phi'' \geq 0$. S podmínkou $\phi'' > 0$ je lepší dělat postupné změny, než jednu velkou.

- Firma maximalizuje čistou současnou hodnotu cash flow:

$$V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\bar{r}(t)t}\{F(K,TL) - wL - I[1+\phi(I/K)]\}dt$$

kde

$$\bar{r}(t) = 1/t \int_0^t r(v)dv$$

- Řídící proměnné (které firma ovlivňuje) je úroveň investic $I(t)$ a množství práce $L(t)$. Zásoba kapitálu $K(t)$ je určena předchozími rozhodnutím a je stavovou proměnnou, která se vyvýjí dle:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

- Current value Hamiltonián pro tento problém je

$$\mathcal{H}(K(t), I(t), L(t)) = F(K,TL) - wL - I[1+\phi(I/K)] + q(I - \delta K)$$

kde $q(t)$ je kostavová (co-state) proměnná měřená v běžné ceně (hodnotě) daného období (tedy v čase t).

- Podrobným řešením modelu se nebudeme zabývat (viz BSiM 3.2), podíváme se pouze na hlavní výsledky.

- Interpretace kostavové proměnné je, že je stínovou cenou stavové proměnné, tj. instalovaného kapitálu K.

- Hlavním výsledkem je, že $I/K = \Phi(q)$ kde $\Phi'(q) > 0$, tj. investice závisejí pouze na q. Důležitou vlastností q je, že shrnuje veškeré informace o budoucnosti, které jsou relevantní pro firmu ohledně jejích investičních rozhodnutí.

- Proměnná q, tedy kostavová proměnná je úzce spojena s Tobinovým q, které je definována jako poměr tržní hodnoty kapitálu vůči reprodukčním nákladům na kapitál. Všimněte si, že q je v našem modelu mezní veličina, zatímco Tobinovo q udává průměrnou hodnotu. Za určitých podmínek jsou ale tyto koncepty totožné.

- Řešením modelu je sedlová cesta pro vývoj $(\hat{k}, q)$. Nejdůležitější pro nás je, že dostáváme postupné přizpůsobení $\hat{k}$ v reakci na různé faktory (jako například změna světové úrokové míry), které změní steady state. Tím pádem dojde k ovlivnění q a tím pádem se $\hat{k}$ bude postupně přizpůsobovat.

- Takže pokud země čelí nákladům na přizpůsobení investic, nějaký čas trvá než dojde k přizpůsobení steady statové úrovni kapitálu, která je určena světovou úrokovou mírou. Ve zkratce: neočekáváme okamžitou konvergenci.

9.6 The Feldstein-Horioka puzzle

- Ve slavné studii pánové Feldstein a Horioka uvádějí výsledky z OLS odhadu, které naznačují silnou vazbu mezi domácí mírou úspor a domácí mírou investic, přičemž tento vztah je překvapivě blízko 1-1.
- Tento empirický výsledek naznačuje, že kapitál není příliš mobilní mezi zeměmi.
- Možná vysvětlení jsou:
  1. Vlády se snaží vyvarovat pomocí fiskální a monetární politiky velkých a dlouhodobých nerovnováh v běžných účtech platební bilance.
  2. Existují fundamentální proměnné, které ovlivňují jak úspory, tak investice, např. daně, demografické podmínky.
  3. Velkou roli mohou hrát firemní úspory (nerozdělený zisk je ponechán, znovu investován ve firmě).
  4. Na straně investorů existuje tendence investovat do domácích aktiv (home-bias)
- Ve stručnosti: tyto faktory přispívají k oslabení vlivu otevřenosti ekonomiky na rychlost konvergence.

Reference

[1] **Cass, David,** Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies,* July 1965, 32, 233-240.

[2] **Feldstein, Martin – Horioka, Charles** Domestic Saving and International Capital Flows *The Economic Journal*, Vol. 90, No. 358, June 1980, 314-329.

[3] **Koopmans, Tjalling C.,** On the Concept of Optimal Economic Growth, In Study Week on The Econometric Approach to Development Planning, Vol. 28 of *Pontificae Acade-*

miae Scientarum Scripta Varia, Amsterdam: North Holland, 1965. `http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p02a/p0238.pdf`.

[4] **Ramsey, Frank P.,** A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal,* December 1928, 38, 543-559.