Věk	Pravděpodobnost úmrtí	Pravděpodobnost dožití	Počet dožívajících	Počet zemřelých	Počet žijících	Pomocný ukazatel	Střední délka života
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e^0_x
0.. ω	$q_x = 1 - e^{-m_x}$ $m_x = \frac{D_x}{S_x}$,	$p_x = 1 - q_x$	$l_{x+1} = p_x . l_x$	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$L_x = ½.(l_x + l_{x+1})$ $L_x = l_{x+1} + ½\ d_x$	$T_x = \sum_{i=x}^{\omega} L_i$	$\frac{T_x}{l_x}$

Význam jednotlivých veličin uvedených v úmrtnostní tabulce:

q_x … vyjadřují pravděpodobnost, že právě x-letá osoba zemře před dosažením věku $x + 1$

m_x … dosazuje tzv. specifická míra úmrtnosti získaná z empirických dat

D_x … je pozorovaný počet osob daného pohlaví zemřelých ve věkové třídě x (tj. po dožití se x let a před dovršením $x + 1$ let)

S_x … je střední stav osob daného pohlaví ve věkové třídě x podle sčítání lidu

p_x … vyjadřuje pravděpodobnost, že osoba ve věku x let se dožije věku $x + 1$;

l_x … je hypotetický počet osob, které se dožijí věku x let ze 100 000 narozených osob (tzv. kořen tabulky - l_0) při odhadnuté úmrtnosti v jednotlivých obdobích;

ω … zvolená horní věková hranice; tedy předpokládáme, že poslední z onoho výchozího počtu 100 000 osob zemře před dosažením věku $\omega + 1$ let (ČSÚ volí $\omega = 103$);

d_x … udává počet zemřelých osob ve věkové třídě x;

L_x … je průměrný počet žijících ve věku x let ($L_0 = l_0(1 - 0{,}92q_0)$, protože se většinou jedná o kojenecká úmrtí, a tak se musí k výpočtu L_0 použít statistik kojenecké úmrtnosti);

T_x … vyjadřuje počet let života, které má celá tabulková generace v daném věku x ještě před sebou;

e^0_x … udává počet let, který má naději prožít osoba právě x-letá ve sledovaném období.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}, \qquad p_x = 1 - q_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

$_np_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba dožije věku $x + n$,

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

$_nq_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba nedožije věku $x + n$,

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x};$$

$_{m|n}q_x$ … pravděpodobnost, že se x-letá osoba dožije věku $x + m$, ale zemře v průběhu následujících n let,

$${}_{m|n} q_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x},$$

$_{m|}q_x$ … pravděpodobnost, že x-letá osoba zemře ve věku $x + m$,

$${}_{m|} q_x = {}_m p_x \cdot q_{x+m} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} = \frac{d_{x+m}}{l_x}.$$

KOMUTAČNÍ ČÍSLA

komutační čísla nultého řádu:

diskontovaný počet dožívajících se věku x: $D_x = l_x \cdot v^x$;

diskontovaný počet zemřelých ve věkové třídě x: $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$;

komutační čísla prvního řádu:

$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega, \qquad M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega.$$

komutační čísla druhého řádu:

$$R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j} \qquad S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}$$

diskontní faktor

$$v = \frac{1}{1+i}$$

JEDNOTKOVÉ NETTO POJISTNÉ

– pojistné pro 1 Kč částky pojistného plnění, bez nákladů pojišťovny,

$\pi\ (zaplacené\ pojistné) = jednotkové\ pojistné * Pojistná\ částka\ (plnění)$

JEDNORÁZOVĚ PLACENÉ NETTO POJISTNÉ

Pojištění na dožití

$${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Pojištění pro případ smrti

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \frac{d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti

$$A^1_{x:n\rceil} = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Doživotní pojištění pro případ smrti odložené o t let

$${}^{a}_{t|}A_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{1+t} + \frac{d_{x+t+1}}{l_x} \cdot v^{2+t} + \ldots = \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + d_{x+t+1} \cdot v^{x+t+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_{x+t} + C_{x+t+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_{x+t}}{D_x}$$

Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o t let

$${}_{t|}A^1_{x:n\rceil} = \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot v^{t+1} + \ldots + \frac{d_{x+t+n-1}}{l_x} \cdot v^{t+n} = \frac{d_{x+t} \cdot v^{x+t+1} + \ldots + d_{x+t+n-1} \cdot v^{x+t+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_{x+t} + \ldots + C_{x+t+n-1}}{D_x} = \frac{M_{x+t} - M_{x+t+n}}{D_x}$$

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí částkou

$$(LA)_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \ldots = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \ldots}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + 2 \cdot C_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{M_x + M_{x+2} + \ldots}{D_x} = \frac{R_x}{D_x}$$

Smíšené pojištění

$$A_{x:n\rceil} = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n + \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{d_x \cdot v^{x+1} + \ldots + d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} + l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{C_x + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Speciální smíšené pojištění s různými pojistnými částkami pro dožití a smrt

$$\pi(A_{x:n\rceil}) = A^1_{x:n\rceil} \cdot PČ_{úmrtí} + {}_nE_x \cdot PČ_{dožití} = \frac{(M_x - M_{x+n}) \cdot PČ_{úmrtí} + D_{x+n} \cdot PČ_{dožití}}{D_x}$$

DŮCHODOVÉ NETTO POJISTNÉ (předlhůtní $ä_x$, polhůtní a_x)

Doživotní důchod

$$ä_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \qquad a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad vztah: a_x = ä_x - 1$$

Dočasný důchod

$$ä_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad a_{x:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Odložený doživotní důchod

$${}_{t|}ä_x = \sum_{k=t}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} \ldots + D_\omega}{D_x} = \frac{N_{x+t}}{D_x} \qquad {}_{t|}a_x = \frac{N_{x+t+1}}{D_x}$$

Odložený dočasný důchod

$${}_{t|}ä_x = \sum_{k=t}^{t+n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_{x+t} + D_{x+t+1} + \ldots + D_{x+t+n-1}}{D_x} = \frac{N_{x+t} - N_{x+t+n}}{D_x} \qquad {}_{t|}a_x = \frac{N_{x+t+1} - N_{x+t+n+1}}{D_x}$$

Předlhůtní doživotní důchod zaručený na n let

$${}_{t|}ä_{n\rceil i} = v^t \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \qquad odložený\ o\ t\ let, zaručený\ na\ n\ let$$

$$ä_{\overline{x:n}\rceil} = ä_{n\rceil i} + {}_{n|}ä_x = \frac{1 - v^n}{1 - v} + \frac{N_{x+n}}{D_x},$$

Doživotní důchod rostoucí lineárně

$$(lä)_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} (k+1) \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k = \frac{D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \ldots + (\omega - x + 1) \cdot D_\omega}{D_x} = \frac{S_x}{D_x}$$

PODROČNÍ DŮCHODOVÉ NETTO POJISTNÉ

- Je možné využít **Woolhouseův vzorec** pro diferencovatelnou funkci u_t:

$$u_0 + u_{\frac{1}{m}} + \ldots + u_{\frac{km}{m}} \approx m \cdot (u_0 + u_1 + \ldots + u_k) - \frac{m-1}{2} \cdot (u_0 + u_k) - \frac{m^2-1}{12} \cdot (u'_k - u'_0) - \frac{m^4-1}{720} \cdot (u'''_k - u'''_0).$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot {}_{\frac{k}{m}}p_x \cdot v^{\frac{k}{m}} \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^k - \frac{m-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot {}_0 p_x + 0\right) \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}. \end{aligned}$$

področní doživotní důchod

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m}. \qquad a_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m},$$

področní odložený doživotní důchod

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+n}}{D_x}, \qquad _{n|}a_x^{(m)} \doteq \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\frac{D_{x+n}}{D_x},$$

področní dočasný důchod

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} \doteq \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right), \qquad a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \doteq \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right).$$

BĚŽNÉ NETTO POJISTNÉ – placené ročně

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\ddot{a}_{\boldsymbol{x}:\overline{\boldsymbol{m}}|}}$$

PODROČNÍ BĚŽNÉ NETTO POJISTNÉ – placené m-krát ročně

Běžné pojistné doživotně placené

$$P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_x^{(m)}}$$

Pojistné dočasně placené

$$P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}$$

Pojištění s pevnou dobou výplaty

$$P_x = \frac{\pi_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{v^n \cdot D_x}{N_x - N_{x+n}} \qquad \pi_x = v^n$$

področní dočasný důchod

$$ {}_{n}\Pi_{x}^{(m)} = \frac{{}_{n}E_{x}}{m \cdot \ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{D_{x+n}}{m\left[N_{x} - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x} - D_{x+n}\right)\right]}, $$

pojištění pro případ smrti:

$$ \Pi_{x}^{(m)} = \frac{A_{x}}{m\ddot{a}_{x}^{(m)}} \doteq \frac{M_{x}}{m\left(N_{x} - \frac{m-1}{2m}D_{x}\right)}; $$

dočasné pojištění pro případ smrti:

$$ \Pi_{x:n\rceil}^{1\,(m)} = \frac{A_{x:n\rceil}^{1}}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{M_{x} - M_{x+n}}{m\left[N_{x} - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x} - D_{x+n}\right)\right]}; $$

smíšené pojištění:

$$ \Pi_{x:n\rceil}^{(m)} = \frac{A_{x:n\rceil}}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{M_{x} - M_{x+n} + D_{x+n}}{m\left[N_{x} - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x} - D_{x+n}\right)\right]}; $$

pojištění odloženého doživotního důchodu (běžné pojistné se platí během doby odkladu n):

$$ {}_{n|}\pi_{x}^{(m)} = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{x}^{(m)}}{m\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m)}} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n}}{m\left[N_{x} - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x} - D_{x+n}\right)\right]}. $$

***** pojistné plnění je vypláceno m1-krát ročně a pojistné se platí m2-krát ročně a m1 se nerovná m2.**

$$ {}_{n|}\pi_{x}^{(m_{1,2})} = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{x}^{(m_1)}}{m_2\,\ddot{a}_{x:n\rceil}^{(m_2)}} \doteq \frac{N_{x+n} - \frac{m_1-1}{2m_1}D_{x+n}}{m_2\left[N_{x} - N_{x+n} - \frac{m_2-1}{2m_2}\left(D_{x} - D_{x+n}\right)\right]}. $$

***** poplatník platí n1 let, pojišťovna platí po n2 let (n1<n2)**

$$ f * m * \frac{N_{x+n2} - \frac{m-1}{2m}D_{x+n2}}{m\left[N_{x} - N_{x+n1} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x} - D_{x+n1}\right)\right]}. $$