

BRUTTO POJISTNÉ jednotkové - pro 1 korunu pojistné částky; B - jednorázové pojistné; B - běžné pojistné

Jednorázové pojistné

doživotní pojištění

$$B = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x$$

dočasné pojištění

$$B = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:n}$$

Běžné pojistné m = n

doživotní

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta \right)$$

dočasné

$$B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:n}} + \beta \right)$$

Běžné pojistné m < n

doživotní

$${}_m B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left({}_m P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:m}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:m}} + \beta_2 \right)$$

dočasné

$${}_m B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left({}_m P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:m}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x:n}}{\ddot{a}_{x:m}} + \beta_2 \right)$$

Běžné področní pojistné – pojišťovny mohou používat analogické vzorce jako u netto pojištění

doživotní

$$B^{(m)} \approx \frac{B}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x}{N_x}}$$

dočasné

$$B^{(m)} \approx \frac{B}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_x - D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}}$$

Pojištění na dožití s výhradou vrácení pojistného v případě smrti pojištěného

$$B_{x:n} = \frac{{}_n E_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1-\gamma) \cdot \ddot{a}_{x:n} - (IA)_{x:n}^1}$$

$$(IA)_{x:n}^1 = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

Pojištění odloženého doživotního důchodu na k let s výhradou vrácení pojistného při úmrtí pojištěného během odkladu

$$B_{x:n} = \frac{(1+\delta) \cdot {}_k \ddot{a}_x + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x:k}}{(1-\gamma) \cdot \ddot{a}_{x:k} - (IA)_{x:k}^1}$$

smíšené pojištění jednorázové

$$JB_{x:n} = A_{x:n} + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_{x:n} =$$

$$JB_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta_1 (N_x - N_{x+n})}{D_x} + \alpha$$

smíšené pojištění běžné

$$B_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} = A_{x:n} + \alpha + \beta \ddot{a}_{x:n} + \gamma B_{x:n} \cdot \ddot{a}_{x:n} =$$

$$B_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta (N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{(1-\gamma)(N_x - N_{x+n})}$$

smíšené pojištění běžné področní

$$B_{x:n}^{(m)} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + \beta (N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{m(1-\gamma) \left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+n}) \right]}$$

Pojištění odloženého doživotního důchodu (běžné pojistné se platí během doby odkladu n a běžné pojistné i pojistné plnění je uskutečňováno m-krát do roka)

$${}_n | JB_x^{(m)} = (1+\delta) \cdot {}_n | \ddot{a}_x^{(m)} + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x = \frac{(1+\delta) \left(N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} D_{x+n} \right) + \beta_1 \cdot N_x}{D_x} + \alpha$$
$${}_n | B_x^{(m)} = \frac{(1+\delta) \cdot {}_n | \ddot{a}_x^{(m)} + \alpha + \beta_1 \cdot \ddot{a}_x + \beta_2 \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1-\gamma) m \ddot{a}_{x:n}^{(m)}} = \frac{(1+\delta) \left(N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} D_{x+n} \right) + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2 (N_x - N_{x+n}) + \alpha D_x}{m(1-\gamma) \left[N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+n}) \right]}$$

odvozený vzorec pro poj. odloženého ročního doživotního důchodu o n1 let placeného běžným pojistným po dobu n2 let (n2 ≤ n1)

$${}_n | B_x^{(m)} = \frac{(1+\delta) N_{x+n1} + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2 \cdot (N_x - N_{x+n2}) + \alpha \cdot D_x}{(1-\gamma) \cdot (N_x - N_{x+n2})}$$
$${}_n | B_x^{(m)} = \frac{(1+\delta) \left(N_{x+n1} - \frac{m-1}{2m} D_{x+n1} \right) + \beta_1 \cdot N_x + \beta_2 \cdot (N_x - N_{x+n2}) + \alpha \cdot D_x}{m(1-\gamma) \cdot (N_x - N_{x+n2} - \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+n2}))}$$

Lékařský underwriting – multiplikativní m_m a aditivní m_a nadúmrtnost

$$q_x^z = \left(1 + \frac{m_m}{100}\right) \cdot q_x + \frac{m_a}{1000}$$

Zdravotní aspekty

100% DD akcelerace

$$q_x^{acc} = i_x + (1 - k_x) \cdot q_x$$

$q_{acc\ x}$ – pravděpodobnost jedince, který je naživu ve věku x a neměl DD diagnózu ve věku x a dříve, je DD diagnostikován před dosažením věku $x+1$
 i_x – pravděpodobnost jedince, který je naživu ve věku x a neměl DD diagnózu ve věku x a dříve, je DD diagnostikován před dosažením věku $x+1$
 k_x – poměr DD úmrtí ve věku x vůči všem úmrtím ve věku x

$$P_{x:n|}^{acc} = \frac{A_{x:n|}^{1\ acc}}{\ddot{a}_{x:n|}^{acc}} = \frac{M_x^{acc} - M_{x+n}^{acc}}{N_x^{acc} - N_{x+n}^{acc}}$$

Nezávislé DD pojistné plnění

$$q_x^{ind} = i_x$$

jednotková počáteční hodnota pro samostatné nezávislé DD krytí $A_{x:n|}^{1\ ind} = \frac{M_x^i - M_{x+n}^i}{D_x^{acc}}$

běžné roční netto pojistné $P_{x:n|}^{ind} = \frac{A_{x:n|}^{1\ ind}}{\ddot{a}_{x:n|}^{acc}}$

NETTO REZERVA

Netto rezerva = budoucí výdaje – budoucí příjmy

pojištění pro případ dožití ($a_n = 1$, $a_j = 0$ a $b_j = 0$)

$${}_tV_{x:n|} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:n|} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t|} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}$$

pojištění pro případ smrti

$${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t}}{N_x}$$

dočasné pojištění pro případ smrti

$${}_tV_{x:n|} = A_{x+t:n-t|}^1 - P_{x:n|} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t|} = \frac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

smíšené pojištění

$${}_tV_{x:n|} = A_{x+t:n-t|} - P_{x:n|} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t|} = 1 - \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

pojištění s pevnou dobou výplaty

$${}_tV_{x:n|} = v^{n-t} - P_{x:n|} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t|} = v^{n-t} - v^n \frac{D_x}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

pojištění odloženého doživotního důchodu

$${}_tV_x = \begin{cases} k-t \ddot{a}_{x+t} - P_{x:k|} \cdot \ddot{a}_{x+t:k-t|} = \frac{N_{x+k}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+k}} & \text{pro } t < k \\ \ddot{a}_{x+t} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} & \text{pro } t \geq k \end{cases}$$

Ukládací a riziková část pojistného

$$P_{x:n|} = P_{x:n|}^{ukl}(t) + P_{x:n|}^{riz}(t)$$

$$P_{x:n|}^{ukl}(t) = {}_tV_{x:n|} \cdot v - {}_{t-1}V_{x:n|}$$

Zillmerova rezerva

$${}_tV_x^Z = {}_tV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:n-t}} \cdot \ddot{a}_{x+t:n-t} \quad \text{pro } m > t$$
$${}_tV_x^Z = {}_tV_x \quad \text{pro } m \leq t$$

Odkup = zillmerova rezerva – stornosrážka

Technické změny – redukce pojistné částky

$${}_tV_x^Z \cdot P\check{C} = B_{x+t} \cdot {}_tR_x$$

$${}_tR_x = \frac{{}_tV_x^Z \cdot P\check{C}}{B_{x+t}}$$

nepočítají se α náklady protože jsou v zillmerově rezervě

DYNAMIZACE (INDEXACE) – metoda dodatečného pojištění

$$B' = B + (P\check{C}' - P\check{C}) \cdot B_{x+t:n-t}$$

NEŽIVOTNÍ POJIŠTĚNÍ

Statistické ukazatele: PPP (prům. poj. plnění) = $\frac{\text{celkové pojistné plnění}}{N \text{ (počet pojištění)}}$

$$PP\check{C} \text{ (prům. poj. částka)} = \frac{\text{celková pojistná částka}}{N}$$

$$P\check{S} \text{ (prům. škoda)} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{n \text{ (počet poj. událostí)}}$$

$$\check{S}F \text{ (škodní frekvence)} = q_1 = \frac{n}{N}$$

$$PS \text{ (poj. sazba)} = \frac{\text{celkové pojistné}}{\text{celková pojistná částka}}$$

$$\check{S}S \text{ (škodní sazba)} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celková pojistná částka}}$$

$$\check{S}P \text{ (škodní průběh)} = \frac{\text{celkové pojistné plnění}}{\text{celkové pojistné}}$$

$$\check{S}St \text{ (škodní stupeň)} = q_2 = \frac{P\check{S}}{PP\check{C}}$$

Obecný vzorec netto pojistného

$$N \cdot P \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) = n \cdot P\check{S}$$

$$P = \frac{n \cdot P\check{S}}{N \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)} \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{P\check{S}}{PP\check{C}} \cdot PP\check{C} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot PP\check{C} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S$$

$$p \text{ (roční pojistné na jednotkovou částku)} = v \cdot q_1 \cdot q_2$$

Obnosové pojištění – závisí pouze na vzniku pojistné události, ne na výši škody

$$P_{(s)} = v \cdot q_1 \cdot S$$

Škodové pojištění – závisí na výši vzniklé škody X, platí poj. plnění $\leq X$

Ryzí zájmové pojištění -> poj. plnění = X

$$P_{(z)} = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot H$$

Pojištění na plnou hodnotu -> poj. částka $S \leq H$

$$s = \frac{S}{H} \quad \text{kde } s \leq 1 \quad \dots \text{intenzita pojistné ochrany}$$

$$\text{pojistné plnění} = s \cdot X$$

$${}^sP_{(H)}^H = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot S = v \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot s \cdot H = s \cdot P_{(z)}$$

Pojištění na první riziko

$${}^sP_{(P)}^H = v \cdot q_1 \cdot [G_s \cdot H + (1 - b_s) \cdot S] = v \cdot q_1 \cdot [G_s + (1 - b_s) \cdot s] \cdot H$$

$G \cdot H$ – střední výše pojistného plnění pro škody do stupně s

$(1-b) \cdot S$ – střední výše pojistného plnění pro škody nad škodní stupeň s

Spoluúčast – klient se urč. způsobem podílí na úhradě škody

Podílová spoluúčast + ryzí zájmové pojištění

$${}_pP_{(z)} = \frac{100-p}{100} \cdot P_{(z)}$$

Excidentní spoluúčast + pojištění na první riziko (nehradí škodu do hodnoty F_0 , nad hodnotu jen převyšující část z F_0)

$${}_{F_0}^S P_{(p)}^H = v \cdot q_1 \cdot [G_s + (1 - b_s) \cdot s - G_{f_0} + (1 - b_{f_0}) \cdot f_0] \cdot H \quad \text{kde } f_0 = \frac{F_0}{H}$$

Integrovaná spoluúčast + pojištění na plnou hodnotu (nehradí škodu do hodnoty F_i , pak hradí celou škodu)

$${}_{F_i}^S P_{(H)}^H = v \cdot q_1 \cdot (q_2 - G_{f_i}) \cdot S \quad \text{kde } f_i = \frac{F_i}{H}$$

Brutto pojistné

brutto pojistné = netto pojistné + bezpečnostní přírážka + správní náklady + kalkulovaný zisk

přidání bezpečnostní přírážky -> rizikové pojistné

Riziková přírážka statistické povahy

$$RP = (1 + \lambda_1) \cdot P + \lambda_2 \cdot s + \lambda_3 \cdot s^2$$

s (s^2) – odhad směrodatné odchylky (rozptylu)

lambda – nezáporné koeficienty

Princip směrodatné odchylky

$$RP = P + \lambda \cdot s$$

pro každou pojistku máme údaje o výši škody v daném roce vyjádřené jakou $z_i \cdot S$, kde z_i je škodní stupeň i -té pojistky

$$N \cdot p \cdot S = \sum_{i=1}^N z_i \cdot S \quad \text{na levé straně – celkové netto pojistné za daný rok; na pravé straně – celková škoda}$$

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad \text{průměr škodních stupňů}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (z_i \cdot S - p \cdot S)^2} \quad \text{odhadnutá směrodatná odchylka výše škody na jednu pojistku}$$

při větších hodnotách nevadí, že ve jmenovateli není $N-1$, ale jen N

aproximace $p^2 \approx 0$ přípustná k malým hodnotám pojistné sazby p

$$s = S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^N z_i^2 - 2 \cdot p \cdot \sum_{i=1}^N z_i + N \cdot p^2 \right)} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N z_i^2 - p^2} \approx S \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N z_i^2}$$

odhadnutá směr. odchylka celk. škody pro všechny pojistky v tarifní skupině

$$R = \sqrt{N} \cdot s \approx S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N z_i^2}$$

$$RP = P + \frac{4R}{N} = P + \frac{4}{N} \cdot S \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N z_i^2} = P + \frac{4}{\sqrt{N}} \cdot s$$

Pojistné rezervy – nezasloužené pojistné

výše rezervy = $\frac{\text{délka období po 31.12.}}{\text{délka pojistného období}} \cdot \text{pojistné}$

Trojúhelníková schémata

RBNS rezerva – dosud nezlíkvované, ohlášené

IBNR rezerva – dosud neohlášené

vychází z podkladů za minulé roky – v řádcích podle roku vzniku, ve sloupcích podle let uplynulých od vzniku poj. události
obvykle zohledněná inflace

Metoda Chain Ladder – stupňovitá metoda

Rok vzniku i	Vývojový rok uplynulý od roku vzniku					
	0	1	2	...	n - 1	n
0	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$...	$P_{0,n-1}$	$P_{0,n}$
1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$...	$P_{1,n-1}$	
2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$...		
...		
n - 1	$P_{n-1,0}$	$P_{n-1,1}$				
n	$P_{n,0}$					

- **zadané hodnoty** $P_{i,j}$ – černé hodnoty jsou zadané
 - **upravit o inflaci** – černé hodnoty
 - **vyrobít kumulativní hodnoty** $C_{i,j}$ – nasčítávám jednotlivé hodnoty (viz tabulka)
 - **spočítat hodnoty** λ_1 – červený obdélník děleno zelený obdélník
 - λ_2 – modrý obdélník děleno žlutý obdélník atd.
 - **dopočítat chybějící hodnoty** čtverce viz tabulka
 - **rezerva** (oranžové hodnoty v n sloupci sečíst a odečíst od nich bílé hodnoty diagonály řádků 1 až n) viz červená čára mínus zelená čára
 - **chyba odhadu** – zpětně dopočítat bílé hodnoty z bílé diagonály pomocí vzorce (př. $C_{2,2} = C_{2,3} / \lambda_3$) a pak každou buňku porovnat pomocí vzorce
- $$\text{relativní chyba odhadu} = \left| \frac{S - O}{S} \right| \cdot 100$$
- S je skutečná hodnota buňky, O je odhad

Rok vzniku i	Vývojový rok uplynulý od roku vzniku					
	0	1	2	...	n - 1	n
0	$C_{0,0} = P_{0,0}$	$C_{0,1} = C_{0,0} + P_{0,1}$	$C_{0,2} = C_{0,1} + P_{0,2}$...	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0} = P_{1,0}$	$C_{1,1} = C_{1,0} + P_{1,1}$	$C_{1,2} = C_{1,1} + P_{1,2}$...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n-1} * \lambda_n$
2	$C_{2,0} = P_{2,0}$	$C_{2,1} = C_{2,0} + P_{2,1}$	$C_{2,2} = C_{2,1} + P_{2,2}$...		
...
n - 1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,1} * \lambda_2$...		
n	$C_{n,0}$	$C_{n,0} * \lambda_1$	$C_{n,0} * \lambda_1 * \lambda_2$...		

Separáčn1 metoda

Rok vzniku i	Počet škod n_j	Vývojový rok j uplynulý od roku vzniku				
		0	1	2	...	n
0	n_0	$n_0 * r_0 * \lambda_0$	$n_0 * r_1 * \lambda_1$	$n_0 * r_2 * \lambda_2$...	$n_0 * r_n * \lambda_n$
1	n_1	$n_1 * r_0 * \lambda_1$	$n_1 * r_1 * \lambda_2$	$n_1 * r_2 * \lambda_3$...	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$
2	n_2	$n_2 * r_0 * \lambda_2$	$n_2 * r_1 * \lambda_3$	$n_2 * r_2 * \lambda_4$	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$
...	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$	$\leftarrow * \lambda_{n+3}$
n	n_n	$n_n * r_0 * \lambda_n$	$\leftarrow * \lambda_{n+1}$	$\leftarrow * \lambda_{n+2}$	$\leftarrow * \lambda_{n+3}$	$\leftarrow * \lambda_{n+4}$

- platí vzorec $P_{i,j} = n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}$
- r – zlíkvované škody, lambda – vzniklé škody
- zadané hodnoty – nutno podělit počtem škod, abychom mohli pokračovat ve výpočtech
- musíme spočítat hodnoty r a lambda, platí:

$$r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$$

$$\lambda_n = \text{diagonála}_n$$

$$r_n = \frac{S_{0,n}}{\lambda_n}$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{\text{diagonála}_{n-1}}{1 - r_n}$$

$$r_{n-1} = \frac{S_{0,n-1} + S_{1,n-1}}{\lambda_n + \lambda_{n-1}}$$

- takto pokračujeme, dokud nemáme všechny proměnné spočítané
- $\lambda_{n+1} = \lambda_n * (1 + \text{inflation})$ a tímto násobíme bílé hodnoty viz tabulka
- nakonec všechny hodnoty opět vynásobíme počtem škod
- rezerva pro jednotlivé roky – sečíst hodnoty po diagonálách (tam kde je stejná lambda)
- rezerva celková – sečíst rezervy v jednotliv. letech