Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

Funkce, limita, derivace, extrémy

Petr Liška

Masarykova univerzita

16.9.2014

Co je to funkce?

Definice

Nechť jsou dány množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Předpisy

$$f: \quad x^2 + y^2 = 1, \qquad g: \quad x = y^2$$

popisují křivky v rovině, ale nejsou funkce proměnné x, neboť k jedné hodnotě x jsou přiřazeny dvě hodnoty y, konkrétně

$$f: \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \qquad g: \quad y = \pm\sqrt{x}.$$

Definiční obor a graf funkce

Základní úlohou je určení definičního oboru funkce, tj. nalezení takových hodnot x, pro které má funkční předpis smysl.

$$\text{a)} \quad f:\ y = \frac{x-1}{x-2}, \ \text{b)} \quad f:\ y = \sqrt{x^2 - 3x + 2},$$
$$\text{c)} \quad f:\ y = \ln(1 - x^2).$$

Definice

Grafem funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Křivka v rovině je grafem nějaké funkce právě tehdy, když neexistuje žádná přímka rovnoběžná s osou y, která by protínala tuto křivku více než jednou.

Vlastnosti funkcí I

Definice

Funkce f se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in D(f)$.
Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k ose y).
Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný vzhledem k počátku).
Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Vlastnosti funkcí II

Definice

Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$. Nejmenší perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Definice

Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.
Funkci f nazveme *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.
Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

Vlastnosti funkcí III

Definice

Nechť $u\colon A \to B$ a $f : B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce u se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Poznamenejme, že inverzní funkci lze definovat pouze pro prosté funkce. Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle přímky $y = x$.

Polynomy

Definice

Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{kde} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem* neboli *mnohočlenem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu a značíme $\mathrm{st}\, P$.

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže $P(\alpha) = 0$.

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. (Pro $k = 1$ používáme název *jednoduchý kořen*.) Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Poznámka

i) Je zřejmé, že definičním oborem polynomu je množina reálných čísel.

ii) Je-li $P(x) = a_0 \neq 0$ (konstantní funkce), jde o polynom nulového stupně.

iii) Mezi polynomy definujeme operace sčítání a násobení tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)$ a $(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$, tj. při sčítání sčítáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x a při násobení jde o obyčejné násobení mnohočlenů. Součet (resp. rozdíl) a součin dvou polynomů je opět polynom.

Vlastnosti polynomů

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, *kde* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *je polynom stupně* $n \geq 0$.

- *i) Dva polynomy* P, Q *stupně* n *jsou si rovny, jestliže jsou si rovny koeficienty u sobě odpovídajících mocnin.*
- *ii) (Základní věta algebry.) Polynom* P *má nad komplexním oborem* $\mathbb{C}$ *právě* n *kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*
- *iii) Je-li komplexní číslo* α k*-násobným kořenem reálného polynomu* P, *je číslo komplexně sdružené* $\bar{\alpha}$ *rovněž* k*-násobným kořenem polynomu* P.
- *iv) Nechť* $a_n = 1$. *Je-li celé číslo* α *kořenem polynomu* P *s celočíselnými koeficienty, pak* α *je dělitelem čísla* a_0.

Rozklad polynomu v oboru reálných čísel

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, kde* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *je polynom stupně* $n \geq 0$.
Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *všechny reálné kořeny polynomu* P *s násobnostmi* $k_1, \ldots, k_r$ *a* $(c_1 \pm id_1), \ldots, (c_s \pm id_s)$ *všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*, platí*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r}[(x-c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \cdot \ldots \cdot [(x-c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

Znaménko polynomu

Úlohou určení znaménka polynomu rozumíme nalezení intervalů, kde je polynom kladný a kde záporný. Tato úloha je důležitá při vyšetřování průběhu funkce. K určení znaménka hodnot polynomu použijeme rozklad polynomu a následující fakt. Jsou-li $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ všechny jeho navzájem různé reálné kořeny, pak v každém z intervalů $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, \infty)$ je polynom stále kladný nebo stále záporný.

Příklad

Určete znaménko polynomu $P(x) = (x^2 - x)(x - 2)^2$ a načrtněte jeho graf.

Hornerovo schéma

Mějme polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Jeho hodnotu pro číslo c určíme pomocí následující tabulky, kterou nazýváme *Hornerovo schéma*.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
c	a_n	$\underbrace{c \cdot a_n + a_{n-1}}_{c_1}$	$\underbrace{c \cdot c_1 + a_{n-2}}_{c_2}$	$\cdots$	$\underbrace{c \cdot c_{n-2} + a_1}_{c_{n-1}}$	$\underbrace{c \cdot c_{n-1} + a_0}_{c_n}$

Poslední získaná hodnota c_n je hodnota polynomu P v bodě c. Upozorněme, že v záhlaví tabulky jsou všechny koeficienty, tj. i případné nuly zastupující mocniny, které v polynomu chybí.
Je-li $c_n = 0$, tj. $P(c) = 0$, pak číslo c je kořenem. V tomto případě jsou čísla $a_n, c_1, \ldots, c_{n-1}$ koeficienty polynomu $Q(x)$ stupně $n-1$, pro který platí $P(x) = (x-c)Q(x)$. Tedy pro hledání dalších kořenů můžeme použít „jednodušší" polynom Q.

Racionální lomené funkce

Definice

Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální funkce* (též racionální lomená funkce). Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}\,P < \mathrm{st}\,Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}\,P \geq \mathrm{st}\,Q$.

Příkladem ryze lomené racionální funkce jsou funkce $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+1}{x^5}$; příkladem neryze lomené racionální funkce jsou funkce $\frac{x^2+1}{x}$ nebo $\frac{x^2+2}{2x^2-1}$.

Platí následující tvrzení:

i) Definičním oborem racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je množina tvaru

$$D(R) = (-\infty, \infty) \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou všechny reálné kořeny polynomu Q.

ii) Je-li $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neryze lomená racionální funkce, pak dělením polynomů P a Q obdržíme součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Například

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{5x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

Znaménko racionální lomené funkce určíme podobně jako u polynomu.

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky I

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální funkce. Každou takovou funkci lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

• Je-li číslo α reálný jednoduchý kořen polynomu Q, pak rozklad funkce R obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)}.$$

• Je-li číslo α reálný k-násobný kořen polynomu Q, pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{M}{(x-\alpha)^k}.$$

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky II

- Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené jednoduché kořeny polynomu Q, pak rozklad obsahuje parciální zlomek tvaru

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.

- Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R obsahuje součet dvou parciálních zlomků tvaru

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2}.$$

Podobně trojnásobné dvojici komplexních kořenů odpovídá součet tří parciálních zlomků atd.

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky III

Rozklad funkce R je součtem všech parciálních zlomků výše uvedeného tvaru, které přísluší všem kořenům polynomu Q. Konstanty v parciálních zlomcích (lze ukázat, že jsou určeny jednoznačně) nalezneme metodou neurčitých koeficientů, tj. napíšeme formální tvar rozkladu a celou rovnost vynásobíme polynomem Q.
Dostaneme tak rovnost dvou polynomů pro všechna x kromě kořenů jmenovatele. Tyto polynomy jsou identické, tj. mají stejné koeficienty, které určíme pomocí dvou možných způsobů:

- porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin,
- dosazením konkrétních hodnot x (vhodné jsou zvláště kořeny jmenovatele Q).

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky IV

Získáme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých konstant, kterou vyřešíme.

Příklad

Rozložte racionální funkci na parciální zlomky:

$$\text{a)} \quad R(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x-15}, \text{ b)} \quad R(x) = \frac{x^2+4x}{x^4-16}.$$

Limita funkce I

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má ve *vlastním bodě vlastní limitu*.
Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má ve *vlastním bodě nevlastní limitu*. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

Limita funkce II

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě vlastní limitu*. Podobně můžeme tuto limitu popsat pro $-\infty$.

Definice limity pomocí okolí

Definice

Nechť $x_0, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme *okolím bodu* ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Definice

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Věta

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0.

Podobně můžeme popsat limitu zprava i příslušné nevlastní limity.

Věta

Platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *právě tehdy, když* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Výpočet limit I

Pro výpočet limit platí následující početní operace.

Věta

Nechť existují obě vlastní limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

b) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

c) Je-li $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

d) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$.

Pro výpočet limity podílu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

Výpočet limit II

kde

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \ \text{ nebo } \ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

platí vztahy vyjádřené symbolicky

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty. \tag{1}$$

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, pak je vztahy v (1) třeba modifikovat podle znaménka čísla c.
V případech limit typu vyjádřených symbolicky

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

je situace nejednoznačná (jde o tzv. neurčité výrazy).

Spojitost funkce

Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Podobně definujeme i jednostranné spojitosti pomocí jednostranných limit.

Definice

Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, je v něm funkce spojitá zprava (zleva).

Je-li $I = [a, b]$, často se fakt, že je funkce na tomto intervalu spojitá, zapisuje $f \in C[a, b]$.

Všechny tzv. *elementární funkce*, tj.

- mnohočleny,
- exponenciální a logaritmické funkce,
- goniometrické a cyklometrické funkce,
- mocninná funkce (např. $\sqrt{x}$, obecně funkce x^a, kde $a \in \mathbb{R}$ a $x > 0$)

a všechny funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, skládáním a tvořením funkcí inverzních, jsou spojité ve všech bodech, kde jsou definované. Proto je limita těchto funkcí v daném bodě rovna funkční hodnotě.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty.

Věta (Bolzanova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důsledek

Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Definice derivace

Definice

Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{2}$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$.

Derivaci funkce f v bodě x_0 značíme též $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_{x=x_0}$.
Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bezprostředně z definice derivace plynou tyto důležité vlastnosti derivace funkce:

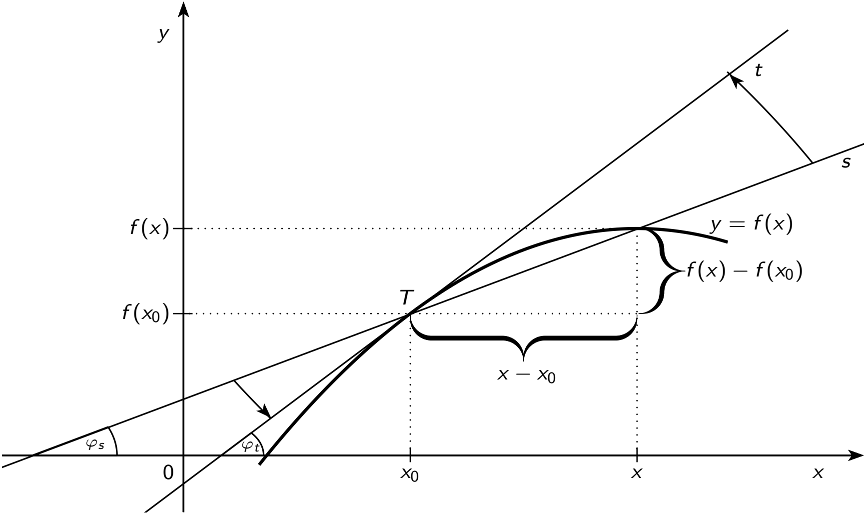
i) Funkce má v daném bodě nejvýše jednu derivaci.

ii) Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

iii) Funkce f má v x_0 derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a ty jsou si rovny.

Geometrický význam derivace



Obrázek: Geometrický význam derivace

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny v bodě $T = (x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklad

Rozhodněte, zda mají funkce $y = x^2$ a $y = |x|$ derivaci v bodě $x = 0$.

Příklad

Z definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$ v libovolném bodě x_0.

Derivace vyšších řádů

Protože lze derivaci funkce f chápat jako funkci, můžeme definovat derivaci funkce f' v nějakém bodě x_0; tu pak nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$. Rovněž vlastní druhou derivaci funkce f lze chápat jako funkci f'' na množině $D(f'') \subset D(f')$. Ta může mít opět derivaci v některém bodě atd. Obecně definujeme:

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Pravidla pro výpočet derivace

Věta

Pro derivace elementárních funkcí platí:

$$c' = 0, \qquad (x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$.

Věta

Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:

a) $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$,

b) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$,

c) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, pak $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Věta

Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Příklad

Vypočtěte derivace následujících funkcí:

a) $y = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$

b) $y = 3\sqrt[3]{x},$

c) $y = x^2 \ln x,$

d) $y = \frac{\cos x - 1}{\sin x},$

e) $y = \operatorname{arctg} x^2,$

f) $y = \sqrt{\mathrm{e}^x + x}.$

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a v každém bodě $x \in (a, b)$ má derivaci $f'(x)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$, pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Označme body roviny $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Lagrangeova věta říká, že existuje alespoň jeden vnitřní bod c z intervalu (a, b) takový, že tečna v bodě $(c, f(c))$ je rovnoběžná s úsečkou AB.

Důsledek

Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.

L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Neurčité výrazy I

Neurčitými výrazy rozumíme limitu součtu, součinu, rozdílu a podílu funkcí, v nichž limity jednotlivých funkcí existují, ale příslušné operace s nimi nejsou definovány. Jde o tyto případy:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

První dva případy limit lze řešit pomocí l'Hospitalova pravidla, další případy je možné převést na první dva následovně.

a) Limita typu „$\infty - \infty$“, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$“.

Neurčité výrazy II

b) Limita typu „$0 \cdot \infty$“, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

což je typ „$\frac{0}{0}$“.

c) Limity typu „0^0, ∞^0, 1^∞“. Řešíme úpravou na exponenciální funkci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}.$$

V poslední upravě jsme použili větu o limitě složené funkce, neboť funkce e^x je spojitá. Přitom limita v exponentu je již typu „$0 \cdot \infty$“.

Vztah derivace a monotonie funkce

Následující věta je důsledkem geometrického významu derivace a vlastností funkce tangens.

Věta

Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Extrémy funkce

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *lokální extrémy*.

Stacionární bod

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak

$$f'(x_0) = 0.$$

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Opačně věta neplatí: Ve stacionárním bodě funkce nemusí nastat extrém! Například funkce $f(x) = x^3$ má v $x_0 = 0$ derivaci $f'(0) = 0$, ale nemá v tomto bodě extrém.

Existence lokálního extrému

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, má zde funkce lokální extrém.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x - 6$, b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Absolutní extrémy

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postačující podmínku pro existenci absolutních extrémů nám udává Weierstrassova věta, která říká, že každá funkce, jež je spojitá na ohraničeném a uzavřeném intervalu, nabývá na tomto intervalu absolutních extrémů. Pokud nejsou některé z těchto předpokladů splněny, nemusí absolutní extrémy existovat.

Jak najít absolutní extrémy

Pokud máme zajištěno, že existují absolutní extrémy funkce f definované na intervalu, používáme pro jejich nalezení následující postup:

- Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
- Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
- Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
- Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách I

Příklad

Ze čtverce papíru o straně a vystřihněte v rozích čtverce tak, aby krabice složená ze zbytku papíru měla co největší objem.

Příklad

Do koule o poloměru R vepište válec s největším objemem.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách II

Příklad

V devatenáctém století objevil francouzský lékař Jean Louis Marie Poiseuille, že průtoková rychlost (v centimetrech za sekundu) krve proudící tepnou ve vzdálenosti r od středu tepny je dána vztahem

$$v(r) = k(R^2 - r^2),$$

kde k je kladná konstanta a R je poloměr tepny. Určete, v jaké vzdálenosti od středu tepny je rychlost krve nejvyšší.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách III

Příklad

Ve městě s 10 000 obyvateli je počet N lidí, kteří mají v daném čase t chřipku, roven

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 9999\mathrm{e}^{-t}},$$

kde t je čas měřený ve dnech a chřipka je rozšířena jedinou osobou, která ji měla v čase $t = 0$. Určete, v kterém čase t je rychlost šíření nemoci největší.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách IV

Příklad

Rychlost světla závisí na prostředí, ve kterém se světlo šíří, a obecně je pomalejší v hustším prostředí. Fermatův princip je jeden ze základních zákonů optiky, který říká, že světlo se v prostoru šíří z jednoho bodu do druhého po takové dráze, aby doba, kterou světlo potřebuje k proběhnutí této dráhy, byla minimální. Najděte cestu světelného paprsku z bodu A v prostředí, v kterém je rychlost světla c_1, do bodu B v prostředí s rychlostí světla c_2.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách V

Příklad

Máme směs kyslíku a oxidu dusnatého. Okysličování oxidu dusnatého probíhá podle reakce

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

a pro její rychlost v platí

$$v = k[NO]^2[O_2],$$

kde $k > 0$ je rychlostní konstanta. Určete takovou koncentraci kyslíku v této směsi, při které se oxid dusnatý nejrychleji okysličí.

Aplikace derivací při optimalizačních úlohách VI

Příklad

V čisté vodě platí vztah pro iontový součin vody K_w:

$$K_w = [H^+][OH^-],$$

kde $[H^+]$ je koncentrace vodíkových kationtů a $[OH^-]$ je koncentrace hydroxidových aniontů. Určete funkci $[H^+] + [OH^-]$ v závislosti na $[H^+]$ a stanovte minimum této funkce.

Konvexní a konkávní funkce

Nyní se zaměříme na to, jak derivace souvisí s tvarem grafu funkce, tj. s tím, jak je graf vydutý (zakřivený). Pro popis této vlastnosti zavedeme pojmy *konvexní* a *konkávní* funkce.
V následujícím předpokládejme, že má funkce f derivaci na intervalu I.

Definice

Řekneme, že funkce f je *konvexní na intervalu I*, jestliže graf funkce leží nad tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{pro } x, x_0 \in I.$$

Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu I*, jestliže graf funkce leží pod tečnou v libovolném bodě tohoto intervalu, tj. platí

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{pro } x, x_0 \in I.$$

Věta

Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.*

b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.*

Definice

Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, anebo naopak. Stručně říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi.

Věta

a) *Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*

b) *Nechť $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.*

Asymptoty funkce

Pomocí limit můžeme určovat chování funkce v bodech, kde není definována, případně i její chování v nekonečnu. Dostáváme se tak k *asymptotám funkce* neboli přímkám, ke kterým se graf funkce „blíží“. Asymptoty mohou být dvojího typu:

i) V bodech, kde není funkce definovaná a limita zprava nebo zleva je v těchto bodech nevlastní.

ii) Pro $x \to \infty$ se graf funkce blíží k nějaké přímce. Podobně pro $x \to -\infty$.

Definice

Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže platí $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ nebo $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

Jak najít asymptoty se směrnicí?

Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

(obě tyto limity jsou vlastní). Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Příklad

Určete asymptoty grafu funkce

$$\text{a)} \quad y = \frac{x-2}{x+1}, \qquad\qquad \text{b)} \quad y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Vyšetřování průběhu funkce f

a) Stanovíme definiční obor $D(f)$. Určíme nulové body a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Případně zda je funkce f sudá, lichá nebo periodická.

b) Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   lokální extrémy (podle změny znaménka f').

c) Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   inflexní body (podle změny znaménka f'').

d) Určíme asymptoty funkce f.

e) Nakreslíme graf funkce.