Integrální počet funkcí jedné proměnné

Neurčitý a určitý integrál

Petr Liška

Masarykova univerzita

17.9.2014

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I*.

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazýváme *neurčitý integrál* funkce f a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkci $f(x)$ nazýváme integrandem. Výraz $\mathrm{d}x$ je tzv. diferenciál proměnné x a je součástí označení pro integrál.

Pokud není interval I otevřený, pak v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace.

Věta

Je-li funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci f má tvar $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

kde c je reálné číslo a nazývá se *integrační konstanta*.
Z definice neurčitého integrálu plyne, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Věta

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť α je libovolná konstanta. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f+g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Vzorce pro výpočet integrálu

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \int 1 \,\mathrm{d}x = x + c, \\
(2) & \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1, \\
(3) & \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \\
(4) & \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c, \\
(5) & \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1, \\
(6) & \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \\
(7) & \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c, \\
(8) & \int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c, \\
(9) & \int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c, \\
(10) & \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c, \\
(11) & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c, \\
(12) & \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c, \\
(13) & \int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c, \\
(14) & \int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.
\end{array}
$$

Metoda per-partes

Metoda integrování per partes je odvozena z derivace součinu. Víme, že platí $(uv)' = u'v + uv'$. Odtud integrací dostaneme

$$uv = \int u'v + \int uv'.$$

Známe-li jeden integrál, můžeme určit integrál druhý.

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I. Pak platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Většinu integrálů řešených metodou per partes můžeme rozdělit do dvou skupin. Nechť $P(x)$ je polynom, pak první skupinou jsou integrály typu

$$\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x.$$

Zde jako funkci u, kterou do dalších výpočtů derivujeme, volíme polynom, tj. $u = P(x)$. Druhou skupinou jsou integrály

$$\int P(x)\ln x\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,ax\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\arcsin ax\,\mathrm{d}x.$$

Zde volíme polynom jako funkci, kterou do dalších výpočtů integrujeme, tj. $v' = P(x)$.

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$, b) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, d) $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Metoda substituce

Substituční metoda je odvozena z derivace složené funkce.

Věta

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + c.$$

Při výpočtu postupujeme takto: položíme $t = \varphi(x)$, odkud formálně plyne

$$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

a tedy

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c. \quad (4)$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int (3x-4)^7\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int 10x(x^2+13)^{12}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, f) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Integrace racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce je funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P, Q jsou nenulové polynomy.

Je-li $R(x)$ neryze lomená funkce, rozložíme ji na součet polynomu a ryze lomené funkce.

Ryze lomenou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky, které jsou dvou typů:

$$\frac{M}{(x-\alpha)^k} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

podle toho, zda daný zlomek přísluší reálnému kořenu nebo komplexně sdružené dvojici kořenů polynomu Q.

Nejkomplikovanější případ

Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ dvojnásobné komplexně sdružené kořeny polynomu Q, pak R má dva parciální zlomky tvaru

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

Podobný rozklad dostaneme pro n-násobné ($n \geq 3$) komplexní kořeny. Při výpočtu použijeme rekurentní vzorec

$$K_n(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{3-2n}{2-2n}K_{n-1}(x),$$

kde

$$K_1(x)=\operatorname{arctg} x,$$

a rozklad

$$\int \frac{Ax+B}{((x-x_0)^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{1}{(1-n)\left((x-x_0)^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{B+Ax_0}{a^{2n-1}}K_n\left(\frac{x-x_0}{a}\right).$$

Nějaké příklady

Příklad

Vypočítejte následující integrály:

a) $\int \frac{2x^2+6x-2}{x(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Integrace funkcí s odmocninami I

Integrál z funkce typu

$$R\left(x,\ \sqrt[q_1]{x^{p_1}},\ \sqrt[q_2]{x^{p_2}}, \ldots,\ \sqrt[q_n]{x^{p_n}}\right),$$

kde $p_1 \ldots, p_n, q_1, \ldots, g_n \in \mathbb{N}$, můžeme substitucí

$$x = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel $q_1, \ldots, q_n$, převést na integraci racionální lomené funkce.

Příklad

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrace funkcí s odmocninami II

Integrály z funkcí tvaru

$$R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

převedeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Příklad

Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Integrace goniometrických funkcí I

Integrál typu

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x,$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$ můžeme vždy vhodnou substitucí převést na integrál z polynomu.

Je-li n liché číslo, použijeme substitucí $u = \cos x$, je-li m liché, použijeme substituci $v = \sin x$. Jsou-li obě tato čísla lichá, budou fungovat obě substituce, technicky výhodnější je substituovat funkci, která je ve vyšší mocnině. V případě, že jsou obě čísla sudá, použijeme vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Příklad

Vypočítejte následující integrály:

a) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, b) $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x$.

Integrace goniometrických funkcí II

Předchozí příklady můžeme zobecnit a dostaneme následující případy funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$.

i) Je-li integrovaná funkce lichá vůči cosinu, tj. platí-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci $t = \sin x$.

ii) Je-li integrovaná funkce lichá vůči sinu, tj. platí-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

pak volíme substituci $t = \cos x$.

Platí-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Z definice goniometrických funkcích v pravoúhlém trojúhelníku pak můžeme odvodit, že platí

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Integrace goniometrických funkcí III

Integrál z funkce typu $R(\sin x, \cos x)$ můžeme vždy převést na integrál z racionální lomené funkce pomocí tzv. *univerzální* substituce

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Ze substituční rovnice plyne $x = 2\operatorname{arctg} x$ a tedy $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Pomocí definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku (tentokrát s úhlem $\frac{x}{2}$) a vzorců pro dvojnásobný úhel můžeme odvodit, že

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Příklad

Pomocí univerzální substituce vypočítejte integrál

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Eulerovy substituce

Pro přehled si naznačíme postup při integraci některých složitějších funkcí. Integrály z funkcí typu

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

můžeme v případě, kdy má kvadratická rovnice reálné kořeny, upravit na předchozí typ. Má-li rovnice komplexně sdružené kořeny, použijeme tzv. *Eulerovy substituce*, které jsou například pro $a > 0$ tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t,$$

a pro $c > 0$ tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Binomické integrály

Integrály z funkcí typu

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

kde a, b, m, n, $p \in \mathbb{R}$, nazýváme binomické. Tyto integrály lze převést na integrály z racionální lomené funkce v těchto případech:

i) $p \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel čísel m, n;

ii) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p;

iii) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, a to substitucí $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p.

Drobná poznámka

Závěrem poznamenejme, že není vždy možné k dané elementární funkci najít funkci primitivní, která by byla vyjádřena pomocí elementárních funkcí. Mezi takové patří například tyto neurčité integrály:

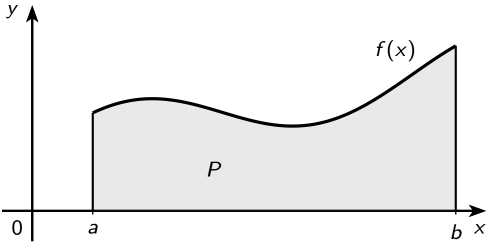
$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \qquad \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x.$$

V těchto případech lze primitivní funkci vyjádřit například pomocí nekonečné mocninné řady. Například

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}.$$

Definice a základní vlastnosti určitého integrálu

Nechť f je nezáporná ohraničená funkce definovaná na $[a, b]$, která je pro jednoduchost spojitá na intervalu $[a, b]$. Určeme obsah plochy P ohraničené grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Tato plocha se někdy pro jednoduchost nazývá *podgraf* funkce.



Obrázek: Podgraf funkce

Obsah podgrafu nemůžeme určit přímo, vyjádříme jej přibližně tak, že jej aproximujeme pomocí obdélníčků:

i) Interval $[a, b]$ rozdělíme na n intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ (tzv. dělicí intervaly) stejné délky tak, že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Délka Δx každého dělicího intervalu je

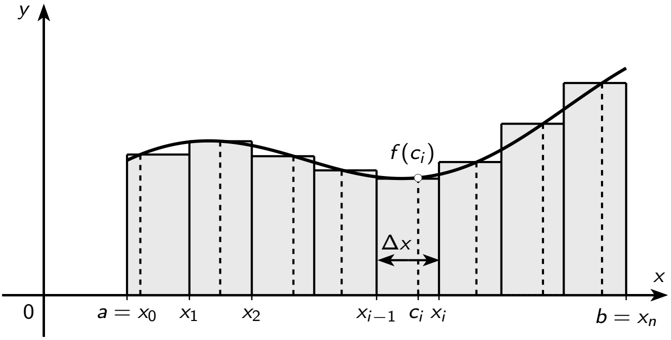
$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

ii) Na každém dělicím intervalu aproximujeme plochu obdélníkem o stranách Δx a $f(c_i)$, kde c_i náleží do dělicího intervalu. Pro obsah P_i tohoto obdélníka platí

$$P_i = f(c_i)\Delta x$$

a součet všech těchto obdélníků přibližně určuje obsah P plochy

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$



Obrázek: Aproximace obsahu plochy obdélníky

Čím větší bude číslo n (počet dělicích bodů), tím přesnější (lepší) bude tato aproximace. Provedeme-li limitní přechod pro $n \to \infty$, dostaneme přesnou hodnotu obsahu plochy

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x. \tag{5}$$

Pro spojité funkce tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Obecně pro funkce, které nejsou spojité, toto nemusí platit. Pokud však tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i, nazýváme ji určitým integrálem a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Symbol $\int$ vznikl jako prodloužení písmene S, které bylo vybráno, protože integrál je limitou sumy.

Definice

Nechť f je funkce ohraničená na $[a, b]$. Nechť $a = x_0$, x_1, $x_2, \ldots, x_n = b$ jsou body dělící interval $[a, b]$ na n stejných subintervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a nechť $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
Určitým integrálem funkce f od a do b rozumíme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na $[a, b]$.
Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez* a funkci f *integrand*.

Důležitou roli hraje tzv. Newton-Leibnitzova formule, která dává do souvislosti určitý integrál funkce a její primitivní funkci (neurčitý integrál).

Věta (Newton-Leibnitzova formule)

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{6}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a, b]$.

Často píšeme místo $F(b) - F(a)$ označení $\Big[F(x)\Big]_a^b$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Vlastnosti určitého integrálu I

Věta

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, pak platí tyto vztahy:

a) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *kde* $a < c < b$;

d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, *jestliže* $f(x) \geq 0$ *na intervalu* $[a, b]$;

e) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *jestliže* $f(x) \geq g(x)$ *na intervalu* $[a, b]$.

Vlastnost c) lze použít pro případ, kdy je funkce f spojitá na intervalu $[a, c]$ a $[c, b]$, ale není spojitá v bodě c.

Vlastnosti určitého integrálu II

Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a > b$ definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a integrál $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ definujeme vztahem

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definujeme-li pro každé číslo $x \in [a, b]$ funkci

$$U(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak derivace této funkce je $U'(x) = f(x)$ a $U(a) = 0$. Tímto způsobem někdy vyjadřujeme funkce, které jsou primitivní k funkci f, ale nejsou elementárními funkcemi, např. funkce

$$\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Metoda per partes a substituce pro určité integrály

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Substituce pro určitý integrál)

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$ a $\varphi(x)$ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ do intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nějaké příklady

Příklad

Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)} \quad \int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}.$$

Příklad

Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)} \quad \int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x \,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \quad \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} \,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinného obrazce

Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Obsah podgrafu funkce f je dán vzorcem

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Plocha, jejíž obsah chceme určit, může být vymezena grafy dvou funkcí. Platí-li například $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in [a, b]$, jedná se o plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Jsou-li navíc funkce f, g spojité na $[a, b]$, platí pro obsah P takto vymezené plochy

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Délka křivky

Nechť funkce f je spojitá a má spojitou derivaci f' na intervalu $[a, b]$. Délka grafu této funkce na intervalu $[a, b]$ je dána

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Objem a povrch rotačního tělesa

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f

$$P = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

kolem osy x je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Nechť f je nezáporná funkce mající spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$. Obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x, je dán určitým integrálem

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu I

Definice

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, \infty)$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

říkáme, že *nevlastní integrál*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

konverguje. Jeho hodnota je

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

V opačném případě, kdy je limita (11) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje*.

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu II

Podobně definujeme nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a nevlastní integrál na přímce

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastní integrál z neohraničené funkce

Definice

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $(a, b]$ a funkce f není ohraničená na $[a, b]$. Pak bod a nazýváme singulárním bodem a definujeme *nevlastní integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Jestliže je tato limita vlastní, říkáme, že integrál *konverguje*. V opačném případě, kdy je limita (13) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Podobně definujeme nevlastní integrál pro singulární bod b.

Příklady

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrály:

a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$ b) $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x,$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$ d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x,$

e) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x,$ f) $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x.$

Příklad

Určete singulární body a vypočtěte nevlastní integrály

a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x,$ b) $\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x,$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x,$ d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$