Základy maticového počtu

Matice, determinant, definitnost

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.9.2014

Matice a vektory

Matice

Matice typu $m \times n$ je pravoúhlé (nebo obdélníkové) schéma, které má m řádků a n sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Vektor

Vektor (veličina, která má směr i velikost) je uspořádaná n-tice prvků (nebo matice typu $n \times 1$)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Typy matic

- čtvercová matice
- jednotková matice
- nulová matice
- horní/dolní trojúhelníková
- diagonální

Operace s maticemi

Součet matic

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pak součet $A+B$ je matice C taková, že

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(po složkách).}$$

Násobení skalárem

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak αA je matice B taková, že

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = (\alpha b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{(po složkách).}$$

Operace s maticemi

Součin matic

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}$. Pak součin AB je matice C taková, že

$$C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}} = \left(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}$$

Operace s maticemi

Pravidla pro počítání s maticemi

Pro matice A, B, C vhodných rozměrů a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

$$
\begin{gathered}
A+B=B+A, \quad (A+B)+C=A+(B+C), \\
(A+B)C=AC+BC, \quad A(B+C)=AB+AC, \\
(AB)C=A(BC), \quad \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, \\
(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \\
A(\alpha B)=\alpha(AB)=(\alpha A)B
\end{gathered}
$$

Obecně neplatí!

$$AB = BA \quad \text{(ani když oba součiny existují)!}$$

Operace s maticemi

Transponovaná matice

Je-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, pak *transponovaná* matice k A je matice $A^\top = B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, kde $b_{ij} := a_{ji}$ pro $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots, m$.
Pokud platí $A^\top = A$ nazývá se matice *symetrická*.
Platí:

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

Skalární součin

Pro vektory $x, y \in \mathbb{C}^N$ definujeme (standardní) *skalární součin* jako

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{N} x_k \, \overline{y}_k = x^\top \overline{y}$$

Vlastnosti

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ pro každé } x \in \mathbb{C}^N, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$
$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$
$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$$
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle \text{ pro } A \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

Ortogonální vektory

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Ortonormální systém vektorů

$\{x_1, \dots, x_M\}$, $x_i \in \mathbb{C}^N$

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}$$

plyne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. V opačném případě, tj. když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{u_n} = \mathbf{o}\,,$$

říkáme, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ jsou *lineárně závislé*.

Hodnost matice

Sloupce (řádky) matice můžeme chápat jako vektory a lineární nezávislost řádků matice pak znamená lineární nezávislost vektorů. Pomocí tohoto pojmu definujeme hodnost matice.

Definice

Hodnost matice A je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.
Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární*.

Jak určíme maximální počet lineárně nezávislých řádků matice?

Je zřejmé, že v nulové matici neexistuje žádný lineárně nezávislý řádek. Hodnost nulové matice je tedy rovna nule. V dalším proto uvažujme pouze nenulové matice, tj. předpokládejme, že je aspoň jeden prvek této matice nenulový. U matice 2×2 snadno poznáme, že jsou její řádky lineárně závislé. Nenulová matice A typu 2×2 má hodnost jedna, pokud je druhý řádek násobkem prvního řádku, tj. matice je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{pmatrix},$$

kde k je nějaké reálné číslo. V opačném případě má matice A hodnost dva.

Jak na větší matice?

Věta

Hodnost matice se nezmění, jestliže:

1. *zaměníme pořadí řádků,*
2. *vynásobíme libovolný řádek nenulovým číslem,*
3. *přičteme k danému řádku (nebo odečteme od daného řádku) libovolný násobek jiného řádku.*

Definice

Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta

Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

Věta

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Determinant matice

Definice

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 1×1 je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11} \,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times n$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Determinanty malých matic

Speciálně pro determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 2×2 dostáváme tzv. *křížové pravidlo*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro determinant $|A|$ čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu 3×3 můžeme použít tzv. *Sarrusovo pravidlo*:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Laplaceův rozvoj

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} |A_{lk}|, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme matici rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat. Praktický výpočet determinantu matice si ukážeme na následujícím příkladě.

Pravidla pro počítaní s determinanty

1. Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant výsledné matice bude k-násobkem determinantu matice původní.
2. Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.
3. Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.
4. Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.

Věta

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Hodnost matice $h(A) = n$ právě tehdy, když $|A| \neq 0$.

Matice a vektory

Inverzní matice

Matice B je *inverzní* k A, jestliže platí $AB = I = BA$.

- Pokud taková matice existuje, označuje se A^{-1}.
- Z této definice plyne, že inverzní matice existuje pouze pro čtvercové matice.
- Inverzní matice existuje právě tehdy, když
  - $h(A) = n$
  - $\det A \neq 0$
- Platí:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Vlastní číslo

Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\mathbf{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\mathbf{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Vlastní vektor je takový vektor, který se po vynásobení matice pouze „natáhne" nebo „zkrátí", ale nemění svůj směr.

Jak vlastní čísla najít?

Z předchozí definice se dá i snadno vyvodit, jak vlastní čísla matice A nalézt. Přepíšeme-li rovnici (1), dostaneme

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda E)\mathbf{x} = 0.$$

Máme tak vlastně homogenní systém lineárních rovnic, u kterého požadujeme, aby měl jiné než triviální řešení. To znamená, že matice $A - \lambda E$ musí mít hodnost menší než n. Jinými slovy tato matice není regulární a pro její determinant musí platit

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{2}$$

Rovnice (2) se nazývá *charakteristická rovnice matice A*.

Některé vlastnosti vlastních čísel

Příklad

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A, potom platí:

- det(A)$= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$,
- matice A^{-1} má vlastní čísla $\frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_n}$,
- je-li A symetrická matice, je její hodnost rovna počtu nenulových vlastních čísel,
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n =$tr($A$), kde tr($A$) je takzvaná stopa matice,
- je-li matice A symetrická, pak všechna vlastní čísla jsou reálná a příslušné vlastní vektory jsou kolmé.

Příklad

Určete vlastní čísla matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definitnost matice

Negativně (semi)definitní matice

Matice $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se nazývá *negativně semidefinitní*, pokud

$$z^\top M z \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^N.$$

V takovém případě píšeme $M \leq 0$. Jestliže dokonce platí $z^\top M z < 0$ pro všechny vektory $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, nazývá se matice M *negativně definitní* a zapisuje se jako $M < 0$.

Je-li matice M navíc symetrická, nazývá se výraz $x^\top M x$, kde $x = (x_1, \ldots, x_2)^\top$, *kvadratická forma* proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

Definitnost matice

Věta

Nechť $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Potom platí

(i) $M < 0 \Leftrightarrow M + M^\top < 0$

(ii) je-li matice M symetrická, pak $M < 0$ právě tehdy, když všechny její vlastní hodnoty jsou záporné.

(iii) $M < 0$ právě tehdy, když $M^{-1} < 0$.

(iv) Je-li $M < 0$, pak pro každou diagonální matici $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $K > 0$ (tj. matice K má kladné prvky na diagonále), je matice KM stabilní, tj. pro všechny vlastní hodnoty matice KM platí $\Re(\lambda) < 0$).

Definitnost matice

Příklad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad -I = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \leq 0, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Definitnost a vlastní čísla

Definitnost symetrické matice

Je-li A symetrická matice, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak matice A je

a) positivně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

b) negativně definitní $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

c) positivně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$,

d) negativně semidefinitní $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0$$

Definitnost matice

(Vedoucí) hlavní submatice a minory

Definitnost matice

Věta

Nechť $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

(i) Je-li matice M symetrická, pak $M < 0$ právě tehdy, když VHM střídají znaménko počínaje záporným.

(ii) Je-li matice M symetrická, pak $M \leq 0$ právě tehdy, když HM lichých řádů jsou nekladné a HM sudých řádů jsou nezáporné.

(iii) Je-li $M < 0$ (a ne nutně symetrická), pak HM lichých řádů jsou záporné a HM sudých řádů jsou kladné (jinými slovy: střídají znaménko počínaje záporným).

(iv) Je-li matice M symetrická, pak $M > 0$ právě tehdy, když VHM jsou kladné.

(v) Je-li matice M symetrická, pak $M \geq 0$ právě tehdy, když HM jsou nezáporné.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} > 0, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} < 0$$

Příklad

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leq 0$$