Pravděpodobnost

Náhodné veličiny a jejich číselné charakteristiky

Petr Liška

Masarykova univerzita

19.9.2014

Představme si, že provádíme pokus, jehož výsledek dokážeme ohodnotit číslem. Před provedením pokusu jeho výsledek, a tedy ani sledovanou hodnotu, neznáme. Proměnná, která připisuje výsledku hodnotu náhodného pokusu sledovanou hodnotu, je proto označována jako *náhodná veličina*. Náhodnou veličinu značíme X. Množina všech možných hodnot náhodné veličiny se nazývá *obor hodnot* náhodné veličina X a značí se χ. Poté, co je pokus proveden, je naměřená hodnota náhodné veličiny značena malým písmenem, např. $x = 21mm$.

Příklad

Co může být náhodnou veličinou?

Definice

Náhodnou veličinou rozumíme zobrazení $X : \Omega \to (-\infty, \infty)$, pro které je množina $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ náhodným jevem pro každé $x \in (-\infty, \infty)$. Obor hodnot značíme χ. Realizaci náhodné veličiny, tj. $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, značíme x.

Příklad

Hod třemi mincemi.

Definice

Reálná funkce

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

definovaná na $(-\infty, \infty)$ se nazývá *distribuční funkcí* náhodné veličiny X.

Příklad

Distribuční funkce pro hod třemi mincemi.

Poznámka

Některé vlastnosti distribuční funkce $\Phi(x)$:

- je neklesající
- je zprava spojitá
- $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ a $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$
- má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti (ty jsou typu „skok“)
- $P(a < x \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ pro $a < b$
- $0 \leq \Phi(x) \leq 1$
- $P(x = a) = \Phi(a) - \lim_{x \to a^-} \Phi(x)$

Definice

Náhodná veličina X se nazývá *diskrétní* (nebo má *diskrétní rozdělení pravděpodobnosti*), jestliže její obor hodnot je nejvýše spočetná množina $\chi = \{x_1, x_2, \dots\}$, tj. nabývá nejvýše spočetně mnoho hodnot $x_1, x_2, \dots$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x = x_i) = 1.$$

Poznámka

Platí

$$\Phi(x) = \sum_{n:\ x_n \leq x} p_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Příklad

Hod třemi kostkami.

Definice

Pro diskrétní náhodnou veličinu definujeme *pravděpodobnostní funkci*

$$\Pi(x) := \begin{cases} P(X = x), & x = x_i,\ i = 1, 2, \dots \\ 0, & x \neq x_i. \end{cases}$$

Poznámka

Některé vlastnosti funkce Π:

- $\Pi(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, \infty)$
- $\Pi(x) \leq 1$, $x \in (-\infty, \infty)$
- $\sum_{x \in \chi} \Pi(x) = 1$
- $\Phi(x) = \sum_{t \leq x} \Pi(t)$

Příklad

Alternativní rozdělení.

Příklad

Binomické rozdělení.

Příklad

Hypergeometrické rozdělení.

Číselné charakteristiky diskrétních náhodných veličin

Definice

Nechť X je diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $\Pi(x)$ a oborem hodnot χ. Potom číslo

$$\mathrm{E}X := \sum_{x \in \chi} x \cdot \Pi(x)$$

se nazývá *střední hodnotou* (též *průměrnou hodnotou* nebo *matematickou nadějí* a v ekonomii také jako *očekávaný výsledek*) náhodné veličiny X.

Příklad

Nechť počet hodnot v χ je konečný a X nabývá všech svých hodnot se stejnou pravděpodobností.

Příklad (Ekonomie)

Uvažujme situaci se dvěma možnými výsledky: úspěch přinese 400,- za akcii a neúspěch pouze 200,- za akcii, přičemž pravděpodobnost úspěchu je 1/4.

Příklad

Určeme střední hodnotu pro

- alternativní rozdělení,
- binomické rozdělení.

Definice

Očekávaný užitek funkce f náhodných výsledků je střední hodnota užitku jednotlivých výsledků vážených jejich pravděpodobností. Očekávaný užitek akce X, která má n důsledků je dán jako

$$\mathrm{E}[f] := \sum_i f(x_i)\Pi(x_i),$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je užitková funkce.

Příklad (ekonomie)

Máme na výběr mezi jistou částkou 200,- a riskantní alternativou získat buď další 200,-, tj. mít nakonec 400,-, nebo o 200,- přijít, tj. mít 0,-.

Další „aproximací“ náhodné veličiny X je to, jak moc jsou její hodnoty rozptýleny okolo střední hodnoty. Proto si zavedeme novou náhodnou veličinu

$$(X_i - \mathrm{E}X)^2,$$

tj. čtverec vzdálenosti od střední hodnoty, a určíme její střední hodnotu.

Definice

Rozptyl (nebo *variabilita*) diskrétní náhodné veličiny X je dán jako

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 = \sum_i \Pi(x_i)(x_i - \mathrm{E}X)^2.$$

Poznámka

Platí

$$\mathrm{Var}(X) \geq 0, \quad \mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X), \quad \mathrm{Var}(a) = 0.$$

Příklad (Ekonomie)

Jestliže x_i jsou výnosy různých investic v portfoliu, jaký je význam rozptylu?

V rozptylu je odchýlení od střední hodnoty umocněno na druhou, takže se stejné vychýlení na různé strany vzájemně nepokrátí. Toto bývá někdy kompenzováno odmocněním rozptylu a výpočtem tzv. *směrodatné odchylky*, tj.

$$\sigma_x := \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sum_i \Pi(x_i)(x_i - \mathrm{E}X)^2}.$$

Příklad

Určeme rozptyl pro

- diskrétní náhodnou veličinu X, která nabývá hodnoty $\pm c$ s pravděpodobností $1/2$,
- alternativní rozdělení,
- diskrétní náhodnou veličinu $X =$ číslo, která padne na kostce.

Příklad (Ekonomie)

Předpokládejme, že se rozhodujeme mezi dvěma zaměstnáními, jež mají stejný očekávaný příjem 15000,-. První je zcela založen na provizi – výdělek závisí na tom, jak mnoho prodáme. Druhé zaměstnání má fixní plat. U prvního zaměstnání můžeme dosáhnout dvou stejně pravděpodobných příjmů – buď 20000,-, když se nám bude dařit, a nebo 10000,-, když budeme málo úspěšní. Druhé zaměstnání vynáší stabilně 15100,-, ale mohli bychom mít pouze 5100,-, jestliže by společnost zkrachovala (což má 1% pravděpodobnost).

Důležitým pojmem při studiu finančních modelů je *kovariance* (střední hodnota součinu odchylek obou náhodných veličin od jejich středních hodnot) dvou náhodných veličin, tj.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{C}(X, Y) &:= \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)\big) = \\ &= \mathrm{E}(XY) - (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}Y) = \\ &= \sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_i)(x_i - \mathrm{E}X)(y_i - \mathrm{E}Y)\end{aligned}$$

Poznámka

Platí

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{D}X.$$

Pokud $X > \mathrm{E}X$ a $Y > \mathrm{E}Y$, pak $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$.
Jsou-li X, Y nezávislé, pak $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Pojem náhodné veličiny můžeme rozšířit i na nespočetný základní prostor v případě, že se jedná o nějaký spojitý interval v $\mathbb{R}$, jehož každý prvek může být výsledkem pokusu, např.

- myslím si číslo v intervalu $[0, 1]$,
- příchod Godota během dne.

V takovém případě má ovšem každá jednotlivá hodnota pravděpodobnost rovnu 0. Proto uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, s jejíž pomocí určíme hodnotu pravděpodobnosti. Pravděpodobnost $P(a \leq x \leq b)$, že výsledek pokusu (tj. hodnota x) bude číslo mezi hodnotami a, b, je obsah plochy podgrafu funkce f v mezích od $x = a$ a $x = b$, tj.

$$P(a \leq x \leq b) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce f musí být po částech spojitá, nezáporná a normovaná. Tato funkce se nazývá *hustotou pravděpodobnosti* spojití náhodné veličiny.
Distribuční funkce je potom dána jako

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

V tomto případě se *střední hodnota* vypočte jako

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

a *rozptyl*

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}X)^2\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Je-li $h : \Omega \to \mathbb{R}$ další funkce definovaná na Ω, např. funkce užitku, pak *očekávaný užitek* funkce h je

$$\mathrm{E}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Příklad

Rovnoměrné spojité rozdělení.

Příklad

Normální rozdělení.

Příklad

Správce počítačové sítě zjišťuje zatížení systému pomocí příkazu, který dává dobu mezi zadáním příkazu a přihlášením nového uživatele do systému. Náhodná veličina X udává délku takového intervalu v hodinách. Za určitých předpokladů je potom hustota náhodné veličiny X tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 15\mathrm{e}^{-15x}, & \text{pro } x > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$