NEJISTOTA A ROVNOVÁHA – řešené příklady

Nejistota

1. Spotřebitel má bohatství ve výši $w = 100$ Kč. Pokud dojde k nepříznivé události, ztratí 20 Kč, pokud dojde k příznivé události, nezíská nic. K nepříznivé události dojde s pravděpodobností $\pi = 0{,}2$. Spotřebitel může uzavřít pojištění, podle kterého mu v případě nepříznivé události pojišťovna vyplatí částku K, pokud zaplatí pojistné $0{,}2K$. Spotřebitel má von Neumann-Morgensternovu užitkovou funkci $u = \pi\sqrt{c_b} + (1-\pi)\sqrt{c_g}$, kde c_b je jeho spotřeba v případě nepříznivé události a c_g v případě příznivé události. Jak velké pojistné plnění K si spotřebitel zvolí?

   Řešení 1

   Spotřebitel si volbou pojistného plnění vybírá jeden z následujících podmíněných spotřebních plánů

   - $c_b = 80 + K - 0{,}2K$ s pravděpod. 20 %.
   - $c_g = 100 - 0{,}2K$ s pravděpodobností 80 %.

   Substitucí odvodíme linii rozpočtu. Např. si můžeme z rovnice $c_b = 80 + K - 0{,}2K$ vyjádřit

$$K = \frac{c_b - 80}{0{,}8} \tag{1}$$

   a dosadit tento výraz do druhé rovnice

$$c_g = 100 - 0{,}2\frac{c_b - 80}{0{,}8}$$

$$c_g = 120 - \frac{1}{4}c_b. \tag{2}$$

   Linii rozpočtu (2) můžeme také napsat jako

$$\frac{1}{4}c_b + c_g = 120.$$

   Spotřebitel má monotónní preference, protože větší spotřeba ve výsledném stavu c_b i ve výsledném stavu c_g mu přináší větší užitek. Vybere si takový spotřební plán podél své linie rozpočtu, který mu přináší maximální užitek. Budeme řešit maximalizační úlohu

$$\max_{c_b, c_g} u = 0{,}2\sqrt{c_b} + 0{,}8\sqrt{c_g}$$

$$\text{při omezení} \quad \frac{1}{4}c_b + c_g = 120.$$

   Tuto úlohu můžeme řešit např. tak, že dosadíme výraz pro c_b z linie rozpočtu do užitkové funkce. Tím získáme neomezenou optimalizační úlohu

$$\max_{c_b} v = \frac{2}{10}\sqrt{c_b} + \frac{8}{10}\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b}$$

   Extrém funkce najdeme tak, že první derivaci užitkové funkce položíme rovnou nule, tedy

$$\frac{dv}{dc_b} = \frac{1}{10\sqrt{c_b^*}} - \frac{1}{10\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b^*}} = 0.$$

$$\sqrt{120 - \frac{1}{4}c_b^*} = \sqrt{c_b^*}$$

$$120 - \frac{1}{4}c_b^* = c_b^*$$

$$85c_b^* = 1\,920$$

$$c_b^* = 96.$$

   Tento výsledek je maximum funkce, protože je užitková funkce konkávní, tedy druhá derivace funkce je záporná:

$$\frac{d^2v}{dc_b^2} = -\frac{1}{20c_b^{*\frac{3}{2}}} - \frac{1}{80\left(120 - \frac{1}{4}c_b^*\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

   Velikost spotřeby v příznivém stavu získáme dosazením do rovnice (2)

$$c_g^* = 120 - \frac{1}{4}c_b^* = 96.$$

   Velikost zvoleného pojistného plnění získáme dosazením do rovnice (1)

$$K = \frac{96 - 80}{0,8} = 20.$$

   Řešení 2

   Pokud jsou indiferenční křivky hladké a konvexní a je zaručeno vnitřní řešení, bude pro optimum spotřebitele platit, že sklon indiferenční křivky se rovná sklonu linie rozpočtu:

$$\text{MRS}(c_b^*, c_g^*) = -\frac{p_b}{p_g}$$

$$-\frac{0{,}1\sqrt{c_g^*}}{0{,}4\sqrt{c_b^*}} = -\frac{1}{4}$$

$$c_g^* = c_b^*.$$

Dosadíme do linie rozpočtu

$$0{,}25c_b^* + c_b^* = 120$$

$$c_b^* = 96.$$

Velikost spotřeby v příznivém stavu získáme dosazením do rovnice (2)

$$c_g^* = 120 - \frac{1}{4}c_b^* = 96.$$

Velikost zvoleného pojistného plnění získáme např. dosazením do rovnice (1)

$$K^* = \frac{c_b^* - 80}{0,8} = 20.$$

2. Spotřebitel má bohatství ve výši $w = 100$ Kč. Může si koupit za 20 Kč loterii, ve které může vyhrát 1 000 Kč. Pravděpodobnost výhry je $\pi = 0{,}01$. Spotřebitel má von Neumann-Morgensternovu užitkovou funkci a jeho funkce užitku ze spotřeby v každém výsledném stavu je $u(x) = x^2$. Koupí si spotřebitel tuto loterii? Koupil by si ji, kdyby byl rizikově neutrální? Co můžeme říct o vztahu spotřebitele k riziku při užitku ze spotřeby ve výsledném stavu $u(x) = x^2$?

   Řešení

   Aby si spotřebitel tuto loterii koupil, musel by být jeho očekávaný užitek z loterie vyšší než očekávaný užitek z bohatství bez loterie. Tedy muselo by platit, že

   $$0{,}01u(c_g) + 0{,}99u(c_b) > u(w),$$

   kde c_g je spotřeba, když spotřebitel vyhraje, a c_b spotřeba, když nevyhraje.

   Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme

   $$0{,}01 \times 1\,080^2 + 0,99 \times 80^2 > 100^2$$

   $$18\,000 > 10\,000.$$

   Spotřebitel si tuto loterii zakoupí.

   Pokud by tento spotřebitel byl rizikově neutrální, jeho očekávaný užitek z loterie by byl

   $$0{,}01u(c_g) + 0,99u(c_b) =$$

   $$= 0{,}01c_g + 0,99c_b = 10 + 79{,}2 = 90.$$

   Jeho očekávaný užitek z loterie je nižší než užitek z bohatství $u(w) = w = 100$. Rizikově neutrální spotřebitel by si tuto loterii nekoupil.

   Při užitku ze spotřeby ve výsledném stavu $u(x) = x^2$ spotřebitel vyhledává riziko.

Rovnováha

3. Poptávka na trhu s alkoholem je $q_D = a - 2p_D$ a nabídka na tomto trhu je $q_S = c + 18p_S$. Předpokládejte, že vláda uvalí novou daň ve výši 50 Kč na litr alkoholu. Kolik korun z daně uvalené na litr alkoholu zaplatí poptávající a kolik nabízející?

   Řešení

   V rovnováze se poptávané množství rovná nabízenému množství:

   $$q_D^* = q_S^*$$

   $$a - 2p_D^* = c + 18p_S^*.$$

   Pokud není statek x zdaněný, bude se poptávková a nabídková cena rovnat, tedy $p_D^* = p_S^* = p^*$. Rovnovážnou cenu můžeme tedy vypočítat takto:

   $$a - 2p^* = c + 18p^*$$

   $$p^* = \frac{a - c}{20}.$$

   Pokud je na statek x uvalena množstevní daň ve výši t, bude v rovnováze platit, že

   $$p_D^* = p_S^* + t$$

   $$p_D^* = p_S^* + 50. \qquad (3)$$

   Řešíme tedy dvě rovnice o dvou neznámých

   $$a - 2p_D^* = c + 18p_S^*$$

   $$p_D^* = p_S^* + 50.$$

   Substitucí najdeme nabídkovou cenu

   $$a - 2(p_S^* + 50) = c + 18p_S^*$$

   $$p_S^* = \frac{a - c}{20} - 5.$$

   Nabízející zaplatí z daně uvalené na litr alkoholu rozdíl mezi původní rovnovážnou cenou p^* a rovnovážnou nabídkovou cenou p_S^*, tedy

   $$p^* - p_S^* = 5.$$

Poptávkovou cenu vypočítáme z rovnice (3)

$$p_D^* = \frac{a-c}{20} - 5 + 50$$

$$p_D^* = \frac{a-c}{20} + 45.$$

Poptávající zaplatí z daně uvalené na litr alkoholu rozdíl mezi rovnovážnou poptávkovou cenou p_D^* a původní rovnovážnou cenou p^*, tedy

$$p_D^* - p^* = 45.$$

4. Poptávka po statku x je $q = 100 - p$ a nabídka statku x je $q = 10 + 0{,}5p$, kde q je množství a p je cena. Vláda stanovila cenu statku x na $\bar{p} = 50$. Aby vláda předešla nedostatku, rozhodla se, že zaplatí nabízejícím takovou množstevní dotaci s, aby byl trh v rovnováze. Jak velká bude tato dotace?

   Řešení

   Dotace musí být tak vysoká, aby se poptávané množství statku x při ceně $\bar{p}$ rovnalo nabízenému množství při ceně $\bar{p}$ a dotaci s. Musí tedy platit, že

$$100 - \bar{p} = 10 + 0{,}5(\bar{p} + s)$$

$$100 - 50 = 35 + 0{,}5s$$

$$s = 30.$$

   Při množstevní dotaci $s = 30$ bude trh s regulovanou cenou $\bar{p} = 50$ v rovnováze.