Minimalizace nákladů a nákladové křivky

Varian: Mikroekonomie: moderní přístup, kapitoly 19 a 20
Varian: Intermediate Microeconomics, 8e, Chapters 20 and 21

Na této přednášce se dozvíte

- co je to nákladová funkce,
- co je to podmíněná poptávka po faktorech,
- co vyplývá z projevené minimalizace nákladů.
- co jsou to průměrné náklady a mezní náklady,
- jaký tvar mají křivky krátkodobých nákladů.
- jaký tvar mají křivky dlouhodobých nákladů.

Maximalizace zisku vs. minimalizace nákladů

Maximalizace zisku – jaká kombinace vstupů povede při dané technologii a cenách vstupů a výstupu k maximálnímu zisku firmy?

Minimalizace nákladů rozdělí problém do dvou částí:

- Jak při daných cenách vstupů minimalizovat náklady na výrobu určitého množstvích produkce?
- Jak při dané nákladové funkci a ceně výstupu (poptávce) zvolit rozsah produkce, při kterém firma maximalizuje zisk?

Minimalizace nákladů

$f(x_1, x_2)$ je produkční funkce, kde x_1 a x_2 jsou množství faktorů 1 a 2.
(w_1, w_2) jsou ceny výrobních faktorů 1 a 2.

Firma chce vyrobit množství produkce y s nejnižšími náklady. Tedy

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{pro } f(x_1, x_2) = y.$$

Nákladová funkce $c(w_1, w_2, y)$ – minimální náklady potřebné k produkci y jednotek výrobku v případě, že ceny jsou (w_1, w_2).

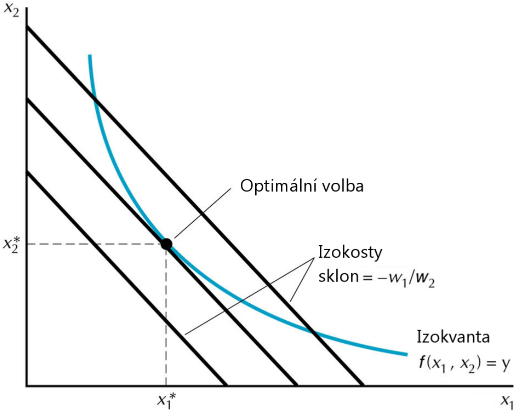
Izokosta – všechny kombinace vstupů x_1 a x_2, které odpovídají dané úrovni nákladů C:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C \iff x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

Minimalizace nákladů – grafické řešení

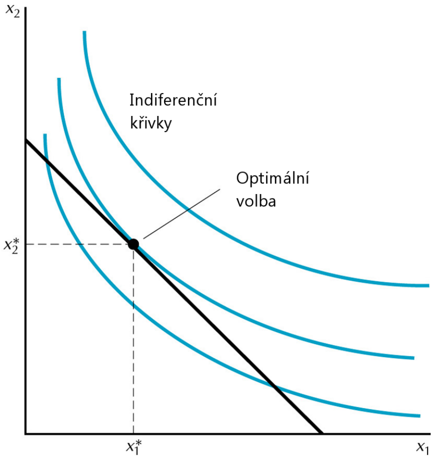
Pokud $x_1^* > 0$ a $x_2^* > 0$ a izokvanta je hladká a konvexní křivka, pak v optimu platí, že

$$\text{sklon izokvanty } = \text{TRS}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2} = \text{sklon izokosty.}$$

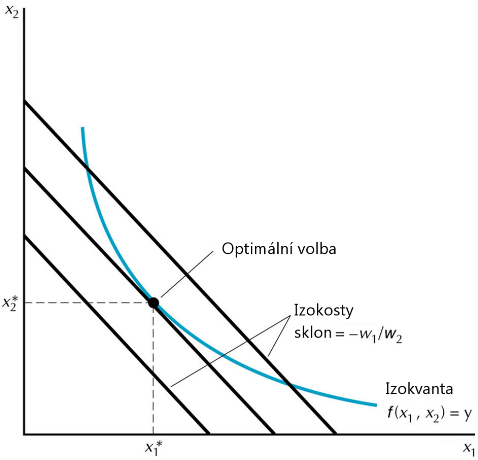


Rozdíl mezi optimalizací firmy a spotřebitele

Spotřebitel – bod na BL s maximálním užitkem



Firma – bod na izokvantě, který odpovídá nejnižším nákladům



Podmíněná poptávka po faktoru

Podmíněná (odvozená) poptávka po faktoru 1 $x_1(w_1, w_2, y)$ **–** jak závisí optimální volba výrobního faktoru 1 na cenách vstupů a množství produktu.

Rozdíl mezi podmíněnou poptávkou a poptávkou po faktoru maximalizující zisk z předchozí přednášky:

- podmíněná poptávka – volba minimalizující náklady pro danou *úroveň* výstupu
- poptávka maximalizující zisk – volba maximalizující zisk pro danou *cenu* výstupu

Příklady nákladových funkcí

Dokonalé komplementy

Produkční funkce – $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} = y$.
V optimu platí, že $x_1 = x_2 = y$, nákladová funkce je tedy

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2)y.$$

Např. pro $w_1 = 5$ Kč a $w_2 = 10$ Kč je nákladová funkce $c(y) = 15y$.

Dokonalé substituty

Produkční funkce – $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = y$. Pokud $w_1 \neq w_2$, bude firma v optimu nakupovat pouze levnější faktor. Nákladová funkce je

$$c(w_1, w_2, y) = \min\{w_1 y, w_2 y\} = \min\{w_1, w_2\}y.$$

Např. pro $w_1 = 5$ Kč a $w_2 = 10$ Kč je nákladová funkce $c(y) = 5y$.

DODATEK: Příklady nákladových funkcí – Cobb-Douglas

Produkční funkce $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b = y$. Minimalizace nákladů má tvar

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{při omezení } x_1^a x_2^b = y.$$

Substitucí $x_2 = (y x_1^{-a})^{1/b}$ získáme neomezený optimalizační problém

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 (y x_1^{-a})^{1/b}.$$

Z podmínky prvního řádu získáme poptávky po faktoru 1 a 2

$$x_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}} \quad \text{a} \quad x_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Dosazením poptávek do funkce $w_1 x_1 + w_2 x_2$ a jednoduchou úpravou dostaneme nákladovou funkci pro Cobb-Douglasovu technologii

$$c(w_1, w_2, y) = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{-a}{a+b}}\right) w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Příklad – výpočet nákladů (konkrétní zadání)

Produkční funkce je $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2}$, $w_1 = 1$ a $w_2 = 1$.
S jakými minimálními náklady můžeme vyrobit $y = 4$?

Hledáme bod, kde se technická míra substituce rovná $-w_1/w_2$:

$$TRS(x_1, x_2) = -w_1/w_2$$
$$-\frac{\sqrt{x_2}}{3\sqrt{x_1}} = -1$$
$$x_2 = 9x_1.$$

Dosazením do produkční funkce získáme podmíněné poptávané množství faktorů 1 a 2 pro $(w_1, w_2, y) = (1, 1, 4)$:

$$x_1(1, 1, 4) = 0{,}16 \quad \text{a} \quad x_2(1, 1, 4) = 1{,}44.$$

Náklady pro $(w_1, w_2, y) = (1, 1, 4)$ jsou

$$c(1, 1, 4) = w_1 x_1(1, 1, 4) + w_2 x_2(1, 1, 4) = 0{,}16 + 1{,}44 = 1{,}6.$$

Projevená minimalizace nákladů

Předpokládejte, že se mění ceny vstupů a výstup se nemění.

Dva různé výběry při výstupu y a různých cenových úrovních:

- při cenách v čase t (w_1^t, w_2^t) firma zvolí (x_1^t, x_2^t),
- při cenách v čase s (w_1^s, w_2^s) firma zvolí (x_1^s, x_2^s).

Slabý axiom minimalizace nákladů (WACM): Jestliže firma volí takový způsob produkce výstupu y, při kterém minimalizuje náklady, a mezi časem t a s se nezmění její technologie, pak musí platit, že

$$w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t \leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s \tag{1}$$

$$\text{a} \quad w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s \leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t. \tag{2}$$

Projevená minimalizace nákladů (pokračování)

Nerovnice (1) a (2) můžeme upravit následujícím způsobem:

Když nerovnici (2) vynásobíme -1, dostaneme

$$-w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t \leq -w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s. \tag{3}$$

Nerovnici (3) pak sečteme s nerovnicí (1) a získáme

$$(w_1^t - w_1^s)x_1^t + (w_2^t - w_2^s)x_2^t \leq (w_1^t - w_1^s)x_1^s + (w_2^t - w_2^s)x_2^s.$$

Pokud u této nerovnice převedeme pravou stranu na levou stranu a dosadíme Δw_1 za $(w_1^t - w_1^s)$, Δx_1 za $(x_1^t - x_1^s)$, atd., dostaneme

$$\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0.$$

Projevená minimalizace nákladů (pokračování)

Co vyplývá z výsledku $\Delta w_1 \Delta x_1 + \Delta w_2 \Delta x_2 \leq 0$?

Např. pokud se změní cena faktoru 1 w_1 a nezmění se cena faktoru 2 w_2, pak platí, že

$$\Delta w_1 \Delta x_1 \leq 0.$$

Nikdy neplatí, že $\Delta w_1 > 0$ a $\Delta x_1 > 0$ nebo $\Delta w_1 < 0$ a $\Delta x_1 < 0$.
$\Longrightarrow$ *Podmíněná funkce poptávky po faktoru není nikdy rostoucí.*

Krátkodobé náklady

Funkce krátkodobých nákladů $c_s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2)$ – minimální náklady potřebné pro výrobu y, kde firma může měnit pouze *variabilní* vstupy:

$$c_s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2) = \min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 \bar{x}_2 \quad \text{při omezení } f(x_1, \bar{x}_2) = y.$$

U dvou vstupů hledáme takové množství faktoru 1, pro které jsou náklady minimální – krátkodobé podmíněné poptávkové funkce:

$$x_1 = x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y) \quad \text{a} \quad x_2 = \bar{x}_2.$$

Funkce krátkodobých nákladů je

$$c_s(w_1, w_2, y, \bar{x}_2) = w_1 x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y) + w_2 \bar{x}_2.$$

Dlouhodobé náklady

Funkce dlouhodobých nákladů $c(w_1, w_2, y)$ – minimální náklady potřebné pro výrobu y, přičemž firma může měnit *všechny* vstupy:

$$c(w_1, w_2, y) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{při omezení } f(x_1, x_2) = y.$$

U dvou vstupů hledáme takové množství faktorů 1 a 2, pro které jsou náklady minimální – dlouhodobé podmíněné poptávkové funkce:

$$x_1 = x_1(w_1, w_2, y) \quad \text{a} \quad x_2 = x_2(w_1, w_2, y).$$

Funkce dlouhodobých nákladů je

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y).$$

Kvazifixní vstupy a kvazifixní náklady

Kvazifixní vstupy – vstupy, které se používají pouze při kladném výstupu, ale jejichž množství nezávisí na rozsahu produkce.

Např. elektřina na osvětlení výrobní haly, některé administrativní práce, ...

Kvazifixní náklady – náklady na kvazifixní vstupy. Nezávislé na objemu produkce, placeny pouze, pokud má firma kladný výstup.

Na rozdíl od fixních nákladů mohou kvazifixní náklady existovat i v LR.

APLIKACE: Náklady a neefektivnost

Z dat o množství produktu a cenách výrobních faktorů můžeme odhadnout nákladovou funkci $c(w_1, w_2, y)$.

Často mají firmy ve stejném odvětví odlišné nákladové funkce. Dvě možná vysvětlení:

- Firmy mají odlišné technologie.
- Některé firmy nevyrábí při minimálních nákladech $=$ X-neefektivnost.

Můžeme říci, které firmy jsou efektivnější? Na čem to závisí?

APLIKACE: Náklady a neefektivnost (pokračování)

M. Piacenza „Regulatory Contracts and Cost Efficiency" (2006) odhadl X-neefektivnost italských firem provozujících veřejnou dopravu.

Spočítal, že průměrná X-neefektivnost byla asi 11 %,
tzn. že náklady průměrné firmy jsou o 11 % vyšší
než minimální náklady na výrobu daného množství produktu.

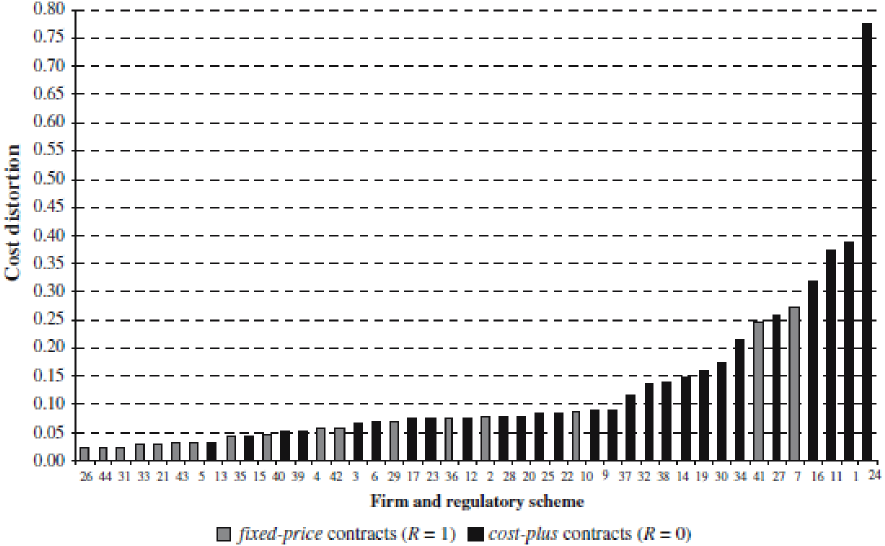
Navíc zjistil, že neefektivnost nejvíc ovlivňoval typ dotace na dopravu:

- Cost plus: dopravci dostávali dotaci v závislosti na nákladech.
- Fixed price: dopravci jezdili za dotovanou ale fixní cenu.

Table 7 Impact of regulatory schemes (R) on inefficiency

Network speed[a]	Cost distortion			
	$R = 0$	Marginal effect	$R = 1$	Percentage impact
Low SP	0.152	−0.037	0.115	−24.28
Average SP	0.116	−0.047	0.069	−40.24
High SP	0.079	−0.051	0.028	−63.72

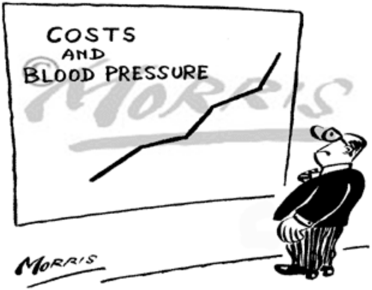
APLIKACE: Náklady a neefektivnost (graf)



Nákladové křivky

Dále budeme předpokládat dokonale konkurenční trh VF.

Ceny vstupů w_1 a w_2 jsou konstantní. $\implies$ Místo $c(w_1, w_2, y)$ budeme nákladovou funkci značit jako $c(y)$.



Průměrné náklady

Celkové náklady jsou

$$c(y) = c_v(y) + F,$$

kde

- $c_v(y)$ jsou variabilní náklady,
- F jsou fixní náklady.

Průměrné náklady jsou

$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y),$$

kde

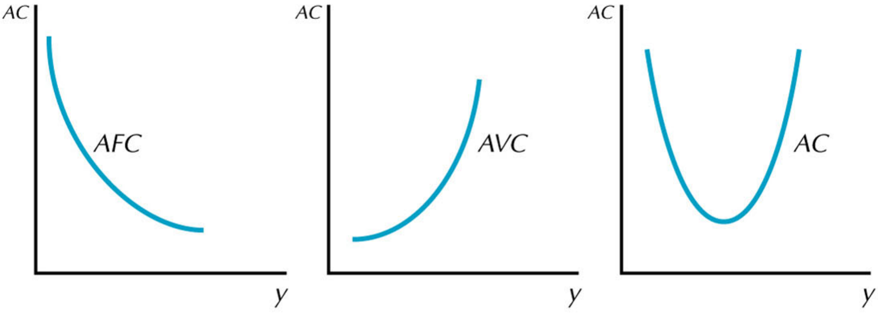
- $AVC(y)$ jsou průměrné variabilní náklady,
- $AFC(y)$ jsou průměrné fixní náklady.

Průměrné náklady (pokračování)

$AFC(y) = \frac{F}{y}$ – klesající; stejné fixní náklady na větší výstup y

$AVC(y) = \frac{c_v(y)}{y}$ – rostoucí od určitého y; omezení fixním faktorem

$AC(y) = AFC(y) + AVC(y)$ – typicky ve tvaru písmene U



Mezní náklady

Mezní náklady – sklon funkce celkových nákladů při výstupu y (o kolik se změní celkové náklady, jestliže se produkce změní o 1):

$$MC(y) = \frac{dc(y)}{dy}$$

Lze odvodit i z funkce celkových variabilních nákladů:

$$MC(y) = \frac{dc_v(y)}{dy}$$

Vztah mezi průměrnými a mezními náklady

U diskrétních statků se $MC(y)$ a $AVC(y)$ pro $y = 1$ rovnají:

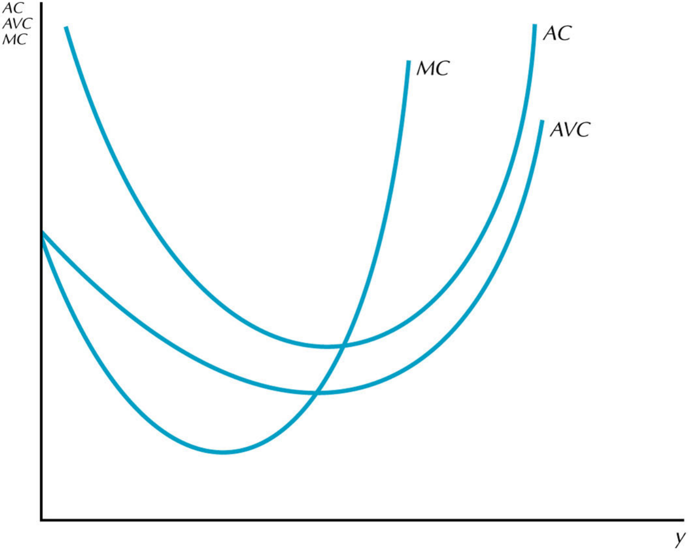
$$MC(1) = \frac{c_v(1) + F - c_v(0) - F}{1} = \frac{c_v(1)}{1} = AVC(1)$$

$MC(y)$ protíná křivky $AC(y)$ a $AVC(y)$ v jejich minimu:

$$AC'(y^*) = \left(\frac{c(y^*)}{y^*}\right)' = \frac{c'(y^*)y^* - c(y^*)}{y^{*2}} = 0 \iff c'(y^*) = \frac{c(y^*)}{y^*}$$

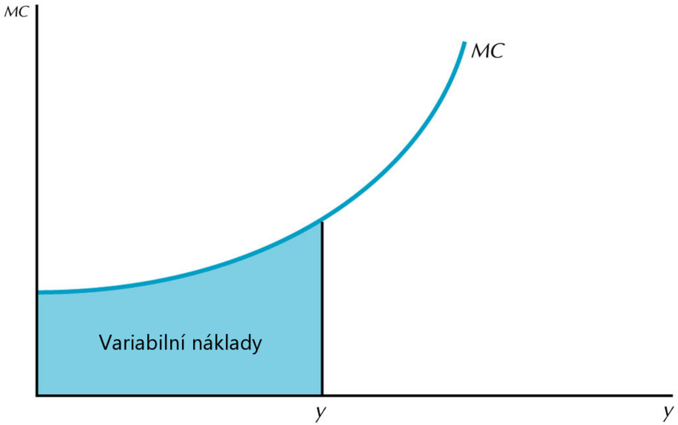
$$AVC'(\hat{y}) = \left(\frac{c_v(\hat{y})}{\hat{y}}\right)' = \frac{c_v'(\hat{y})\hat{y} - c_v(\hat{y})}{\hat{y}^2} = 0 \iff c_v'(\hat{y}) = \frac{c_v(\hat{y})}{\hat{y}}$$

Vztah mezi průměrnými a mezními náklady (graf)



Vztah mezi mezními a celkovými variabilními náklady

Variabilní náklady potřebné pro výrobu y jednotek produktu $=$ plocha pod křivkou mezních nákladů od 0 po bod y.



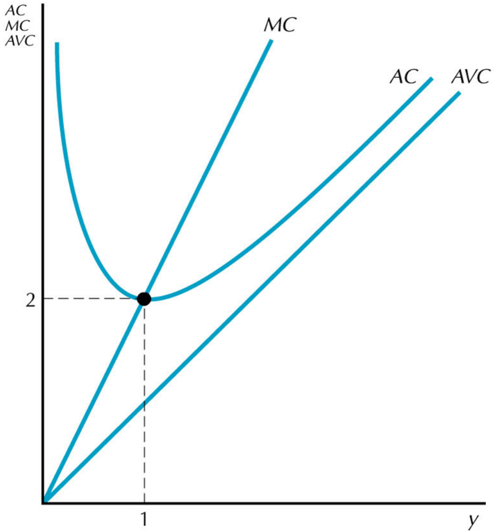
Příklad – nákladové funkce (konkrétní zadání)

Celkové náklady:

- $c(y) = y^2 + 1$
- variabilní – $c_v(y) = y^2$
- fixní – $F = 1$

Průměrné a mezní náklady:

- $AFC(y) = 1/y$
- $AVC(y) = y^2/y = y$
- $AC(y) = y + 1/y$
- $MC(y) = 2y$

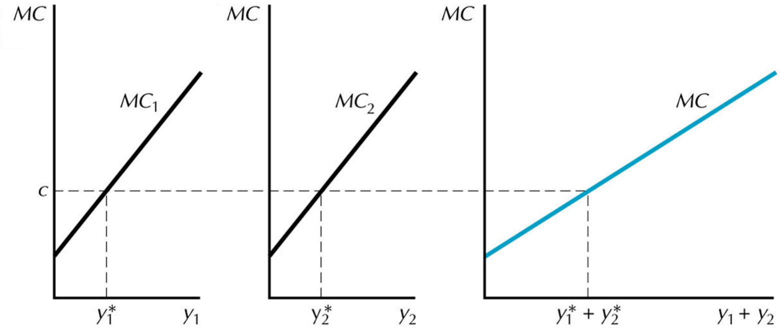


Příklad – křivky mezních nákladů pro dva závody

Firma má dva závody s nákladovými funkcemi $c_1(y_1)$ a $c_2(y_2)$.
Jak rozdělit výrobu y jednotek mezi závody?

Řešíme problém $\min_{y_1,y_2} c_1(y_1) + c_2(y_2)$ při omezení $y_1 + y_2 = y$.

Optimální výroba y_1^* a y_2^* je taková, že $MC_1(y_1^*) = MC_2(y_2^*) = c$.



Dlouhodobé průměrné náklady (LAC)

Jestliže jsou kvazifixní náklady 0 a produkční funkce vykazuje

- klesající výnosy z rozsahu, $LAC(y)$ jsou rostoucí,
- konstantní výnosy z rozsahu, $LAC(y)$ jsou konstantní,
- rostoucí výnosy z rozsahu, $LAC(y)$ jsou klesající.

Proč? Pro konstantní výnosy z rozsahu a konstantu $t > 1$ platí, že

$$LAC(ty) = \frac{c(ty)}{ty} = \frac{t \cdot c(y)}{ty} = LAC(y).$$

Analogicky lze ukázat i pro rostoucí a klesající výnosy z rozsahu.

$LAC(y)$ má tvar písmene U, jestliže produkční funkce vykazuje

- do určitého výstupu rostoucí výnosy z rozsahu
- a od určitého výstupu klesající výnosy z rozsahu.

Krátkodobé a dlouhodobé průměrné náklady

Předpokládejte, že krátkodobá nákladová funkce je $c_s(y, k^*)$, kde velikost závodu k^* je fixním vstupem.

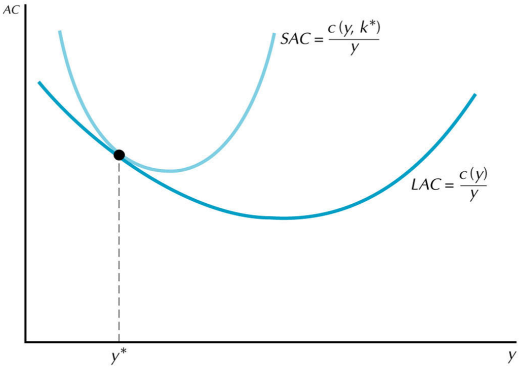
Dlouhodobá nákladová funkce je pak $c(y) = c(y, k(y))$, kde $k(y)$ je optimální velikost závodu pro výstup y.

Pokud k^* je optimální pro výstup y^*, pak platí:

$$c(y^*) = c_s(y^*, k^*)$$

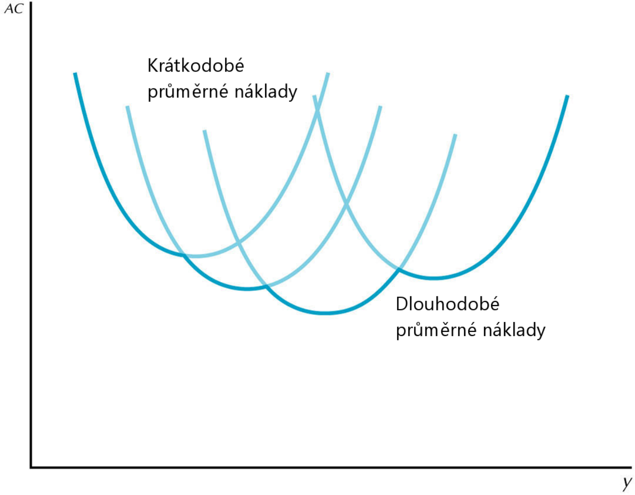
Pro ostatní úrovně výstupu $y \neq y^*$ platí:

$$c(y) < c_s(y, k^*)$$



Diskrétní velikost závodu

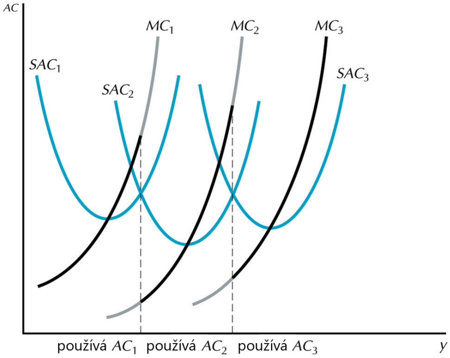
Křivka LAC, pokud firma v LR volí jen mezi 4 velikostmi závodu.

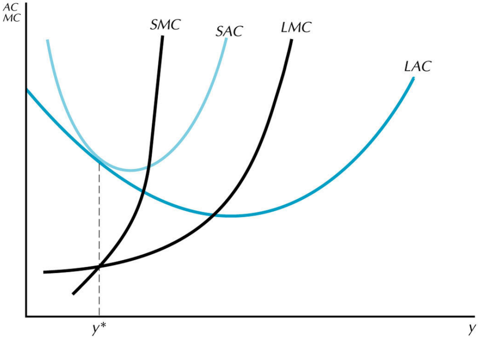


Dlouhodobé mezní náklady (LMC)

Křivka dlouhodobých mezních nákladů LMC,

- pokud firma volí mezi 3 velikostmi závodu (vlevo – černá křivka).
- pokud firma může vybrat libovolnou velikost závodu (vpravo).





Shrnutí

- Nákladová funkce $c(y)$ = minimální náklady potřebné při daných cenách vstupů k výrobě výstupu y.
- Podmíněná funkce poptávky $x_1(y)$ je množství vstupu 1 potřebné pro výrobu výstupu y, které při daných cenách vstupů minimalizuje náklady.
- Pokud firma minimalizuje náklady, funkce podmíněné poptávky má záporný nebo nulový sklon.

Shrnutí (pokračování)

- AC mají obvykle tvar písmene U, protože AFC jsou klesající a AVC od určitého výstupu rostoucí.
- V bodě minima se AC a AVC se rovnají MC.
- Oblast pod křivkou MC se rovná VC.
- Tvar LAC závisí na výnosech z rozsahu.
- Křivka LAC představuje spodní obal křivek krátkodobých průměrných nákladů.