TEORIE HER A OLIGOPOL – řešené příklady

Teorie her

1. Dva lidé si mají mezi sebe rozdělit 4 Kč následujícím způsobem. Každý řekne celé číslo do 4 včetně. Pokud je součet jejich čísel maximálně 4, pak každý dostane takovou částku, jaké číslo jmenoval. Pokud je součet jejich čísel větší než 4 a každý řekl jiné číslo, pak osoba, která řekla menší číslo, obdrží tuto částku a druhý obdrží zbytek. Pokud je součet jejich čísel větší než 4 a každý řekl stejné číslo, pak každý obdrží 2 Kč. Hráči chtějí získat co nejvíce korun. Najděte Nashovu rovnováhu.

   Řešení

   Každý z hráčů má 4 možné akce – může říci číslo 1, 2, 3 nebo 4. Preference hráčů popíšeme množstvím peněz, které hráč obdrží. Můžeme tedy definovat výplatní matici hry. Následně označíme nejlepší odpovědi hráčů hvězdičkou. Např. se podíváme do prvního sloupce a označíme hvězdičkou nejvyšší výplatu hráče 1 v prvním sloupci. (Tzn. pokud hráč 2 jmenuje číslo 1, pak bude mít hráč 1 nejvyšší výplatu, jestliže nahlásí číslo 3 nebo 4. Hvězdičku napíšeme k výplatě 3 do 3 a 4 řádku). Stejně postupujeme pro všechny řádky a sloupce.

		hráč 2			
		1	2	3	4
hráč 1	1	$1,1$	$1,2$	$1,3^*$	$1,3^*$
	2	$2,1$	$2^*,2^*$	$2^*,2^*$	$2,2^*$
	3	$3^*,1$	$2^*,2^*$	$2^*,2^*$	$3^*,1$
	4	$3^*,1$	$2^*,2$	$1,3^*$	$2,2$

   Nashova rovnováha je průsečíkem optimálních odpovědí. Průsečík optimálních odpovědí najdeme v polích, kde jsou obě čísla označena hvězdičkou. Uvedená hra má tedy čtyři Nashovy rovnováhy, které jsou dány profily akcí $(2,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$ a $(3,3)$. (Čísla v závorkách neoznačují výplaty ale akce.)

Oligopol

2. Na trhu s poptávkou $P(Q) = 100 - 2Q$ působí dvě firmy. Tyto firmy se rozhodují o množství produktu, které dodají na trh. Firma 1 má nákladovou funkci $C_1(q_1) = 5 + 4q_1$. Firma 2 má nákladovou funkci $C_2(q_2) = 10 + 4q_2$.

   (a) O jaký model se jedná?

   (b) Jaké budou reakční funkce obou firem?

   (c) Jaká bude Nashova rovnováha této hry? Jaká bude tržní cena? Jaké budou zisky těchto firem?

   (d) Zakreslete reakční funkce do grafu a vyznačte zde Nashovu rovnováhu.

   Řešení

   (a) Jelikož se firmy rozhodují o množstvích, které dodávají na trh, jedná se o Cournotův model oligopolu.

   (b) Reakční funkce udává, jak by měla firma reagovat na dané množství vyrobené druhou firmou, aby maximalizovala svůj zisk. Firma 1 tedy řeší problém maximalizace zisku při daném množství q_2. Zisková funkce firmy 1 je

   $$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1(P(Q)) - C_1(q_1),$$

   kde celkové tržní množství Q je dané součtem množství dodaným firmou 1 a firmou 2, tj. $Q = q_1 + q_2$. Po dosazení poptávkové a nákladové funkce získáme zisk firmy 1. Firma 1 pak řeší problém

   $$\max_{q_1} \Pi_1(q_1, q_2) = q_1(100 - 2(q_1 + q_2)) - (5 + 4q_1).$$

   Hledáme extrém této funkce pro proměnou q_1. Podmínka prvního řádu je

   $$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 100 - 4q_1 - 2q_2 - 4 = 0.$$

   Z podmínky prvního řádu si vyjádříme q_1 jako funkci q_2, čímž získáme reakční funkci firmy 1

   $$f_1(q_2) = q_1 = 24 - \frac{q_2}{2}.$$

   Reakční funkci firmy 2 odvodíme stejným způsobem, tj. jako řešení problému

   $$\max_{q_2} \Pi_2(q_1, q_2) = q_2(100 - 2(q_1 + q_2)) - (10 + 4q_2).$$

   Po vyřešení tohoto problému získáme reakční funkci firmy 2

   $$f_2(q_1) = q_2 = 24 - \frac{q_1}{2}.$$

   (c) Nashovu rovnováhu získáme jako průsečík reakčních křivek. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

   $$q_1 = 24 - \frac{q_2}{2}$$

   $$q_2 = 24 - \frac{q_1}{2}.$$

Dosadíme za q_1 do druhé rovnice

$$q_2 = 24 - \frac{24 - \frac{q_2}{2}}{2}.$$

Úpravou této rovnici získáme $q_2 = 16$. Dosazením do reakční funkce první firmy získáme $q_1 = 16$. Nashovou rovnováhou je tak profil akcí

$$(q_1^*, q_2^*) = (16, 16).$$

Tržní cenu dostaneme dosazením rovnovážných množství do poptávkové funkce.

$$P(Q^*) = 100-2(q_1^*+q_2^*) = 100-2(16+16) = 36$$

Zisky firem opět získáme pouhým dosazením rovnovážných množství do ziskových funkcí

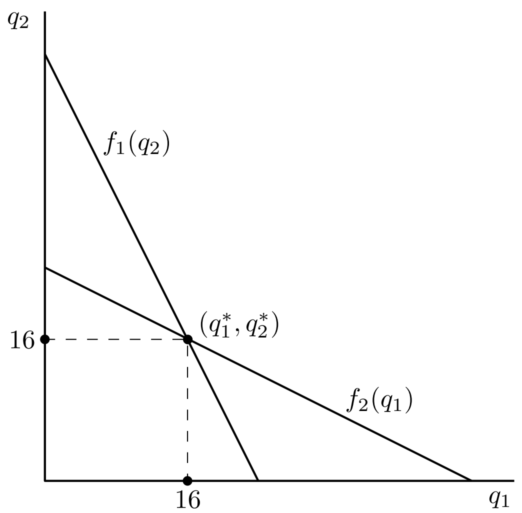
$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(100 - 2(q_1^* + q_2^*)) - (5 + 4q_1^*) =$$

$$= 16(100 - 2(32)) - (5 + 4 \times 16) = 507$$

$$\Pi_2(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(100 - 2(q_1^* + q_2^*)) - (10 + 4q_1^*) =$$

$$16(100 - 2(32)) - (10 + 4 \times 16) = 502.$$

(d) Do grafu vyneseme reakční křivky firmy 1 $f_1(q_2)$ a firmy 2 $f_2(q_1)$. Průsečík reakčních křivek odpovídá Nashově rovnováze $(q_1^*, q_2^*) = (16, 16)$.



3. Zadání zůstává stejné jako v předchozím příkladě s tím rozdílem, že firma 1 se rozhoduje o vyráběném množství jako první. Firma 2 zná množství vyráběné firmou 1 v okamžiku, kdy se rozhoduje o tom, jaké množství bude vyrábět.

   (a) O jaký model se jedná?

   (b) Jaká bude Nashova rovnováha této hry?

   (c) Jaká bude tržní cena? Jaké budou zisky firem?

<u>Řešení</u>

(a) Firmy se rozhodují o vyráběném množství po sobě, přičemž množství vyráběné firmou, která se rozhoduje jako první, je druhé firmě známé. Proto se jedná Stackelbergův model oligopolu.

(b) Stacklebergův model oligopolu můžeme chápat jako sekvenční hru a Nashovu rovnováhu tudíž najdeme zpětnou indukcí. Nejprve musíme vyřešit, jak se rozhodne firma 2, když vidí, že firma 1 vyrobila určité množství q_1. Firma 2 maximalizuje svůj zisk při daném množství q_1, řeší tedy následující problém

$$\max_{q_2} \Pi_2(q_1, q_2) = q_2(100-2(q_1+q_2))-(10+4q_2).$$

Všimněte si, že firma řeší stejný problém jako v předchozím příkladě. Řešením tohoto problému je tudíž stejná reakční křivka jako v Cournotově oligopolu

$$f_2(q_1) = q_2 = 24 - \frac{q_1}{2}.$$

Nyní se podíváme na rozhodování firmy 1. Firma 1 maximalizuje svůj zisk

$$\max_{q_1} \Pi_1(q_1, q_2) = q_1(100-2(q_1+q_2))-(5+4q_1).$$

Firma 1 však nyní ví, že firma 2 zareaguje na libovolné množství q_1 podle své reakční funkce. Za hodnotu q_2 tudíž můžeme dosadit reakční funkci firmy 2. Problém firmy 1 pak dostává následující podobu

$$\max_{q_1} \Pi_1(q_1) = q_1(100-2(q_1+24-\frac{q_1}{2}))-(5+4q_1).$$

Podmínka prvního řádu pro tento problém je

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1)}{\partial q_1} = 48 - 2q_1 = 0.$$

Množství vyráběné firmou 1 bude tedy $q_1 = 24$. Množství vyráběné firmou 2 získáme dosazením q_1 do reakční funkce firmy 2. Tímto způsobem zjistíme, že $q_2 = 12$. Nashova rovnováha je tedy

$$(q_1^*, q_2^*) = (24, 12).$$

(c) Tržní cenu a zisky firem opět získáme dosazením rovnovážných množství do poptávkové a ziskových funkcí. Tržní cena je dána poptávkovou funkcí

$$P(Q^*) = 100-2(q_1^*+q_2^*) = 100-2(24+12) = 28$$

Zisky firem jsou dány ziskovými funkcemi

$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(100-2(q_1^*+q_2^*))-(5+4q_1^*) = 571$$

$$\Pi_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(100-2(q_1^*+q_2^*))-(10+4q_1^*) = 278.$$