1 Řešení lineárních modelů s racoinálními očekáváními

1.1 Převod modelu

Rovnice v modelu převedeme do následujícího tvaru:

$$AE_t x_{t+1} = Bx_t + C\epsilon_t, \tag{1}$$

kde A, B jsou matice koeficientů příslušejících vektoru x_{t+1} a x_t, C je matice koeficientů exogenní složky ϵ.

1.1.1 Příklad

Rovnici ve tvaru

$$\pi_t = \alpha\pi_{t-1} + \beta E_t \pi_{t+1} + \epsilon_t \tag{2}$$

chceme převést do podoby rovnice (1). Vektor x_t tedy bude obsahovat složky π_{t-1} a π_t, tedy

$$E_t x_{t+1} = \begin{bmatrix} \pi_t \\ \pi_{t+1} \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix}$$

Mezi jednotlivými složkami těchto vektorů je vztah (horní index označuje, o který prvek ve vektoru x_t se jedná).

$$E_t x_{t+1}^{(1)} = x_t^{(2)} \tag{3}$$

Rovnici (2) můžeme přepsat jako

$$x_t^{(2)} = \alpha x_t^{(1)} + \beta E_t x_{t+1}^{(2)} + \epsilon_t \tag{4}$$

Přepis rovnice (1) se bude skládat z rovnice (4) a dále z rovnice (3) popisující vazbu mezi jednotlivými složkami vektorů x_t a x_{t+1}, tedy maticově lze psát:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1}^{(1)} \\ E_t x_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

což je v původních veličinách

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_t \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t.$$

Prvky vektoru x_t, které v čase t známe, nazveme *predeterminovanými.* Ty, které neznáme nazveme *nepredeterminovanými.*

1.2 Rozklad a transformace

Dále se budeme zabývat pouze případem, kdy matice A je regulární. Provedeme několik úprav rovnice (1).

$$\begin{aligned} AE_t x_{t+1} &= Bx_t + C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= A^{-1}Bx_t + A^{-1}C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= \tilde{B}x_t + \tilde{C}\epsilon_t, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $\tilde{B} = A^{-1}B$ a $\tilde{C} = A^{-1}C$.

Dále pro matici $\tilde{B}$ najdeme rozklad

$$\tilde{B} = PVP^{-1}$$

kde matice V je čtvercová diagonální matice, obsahující na hlavní diagonále vlastní čísla. Matice P obsahuje ve sloupcích vlastní vektory. Pro matici V platí $V = P^{-1}\tilde{B}P$.

> *Poznámka:* Vlastní vektory v dané matice A jsou takové vektory, které se tímto zobrazením pouze natahují nebo zkracují, tj.
>
> $$Av = \lambda v$$
>
> Číslo λ, které popisuje, jak se vektor zkrátil či natáhl, nazýváme vlastní číslo. Je-li toto číslo v absolutní hodnotě menší nebo rovno jedné, jedná se o vlastní číslo stabilní; v opačném případě je to vlastní číslo nestabilní.

Dále provedeme lineární transformaci vektoru x_t

$$x_t = Pz_t \tag{6}$$

Tedy každý prvek vektoru z_t obsahuje informaci, která ovlivňuje prvek ve vektoru x_t. Tuto transformaci dosadíme do rovnice (5) [1]

$$\begin{aligned} E_t x_{t+1} &= \tilde{B}x_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ Pz_{t+1} &= \tilde{B}Pz_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ z_{t+1} &= \underbrace{P^{-1}\tilde{B}P}_{V} z_t + P^{-1}\tilde{C}\epsilon_t \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy

$$z_{t+1} = Vz_t + D\epsilon_t,$$

kde $V = P^{-1}\tilde{B}P$ a $D = P^{-1}\tilde{C}$.

Abychom dostali jediné řešení, vyžaduje Blanchard-Kahnova podmínka, aby

- počet predeterminovaných veličin v x = počtu stabilních vlastních čísel

nebo obráceně

- počet nepredeterminovaných veličin v x = počtu nestabilních vlastních čísel

[1] Symbol z_{t+1} zde označuje očekávanou hodnotu a je zjednodušením zápisu $E_t z_{t+1}$.

1.3 Nestabilní část

Rovnice modelu přeskupíme tak, aby v matici V byla nejdříve seřazena stabilní vlastní čísla (část matice označená V_{11}) a poté nestabilní (označeno V_{22}). Tomu samozřejmě odpovídají veličiny ve vektoru z. [2] Obdobně je rozdělena matice D. Pro ilustraci poslouží toto rozepsání

$$z = \begin{bmatrix} z^s \\ \hline z^u \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \hline D_2 \end{bmatrix}$$

Soustavu rovnic vyřešíme nejprve pro nestabilní část. Rozepíšeme si rovnice pro následující (dvě) časová období.

$$z^u_{t+1} = V_{22} z^u_t + D_2 \epsilon_t \tag{7}$$

$$z^u_{t+2} = V_{22} z^u_{t+1} + D_2 \epsilon_{t+1} \tag{8}$$

Z rovnice (7) si vyjádříme z^u_t. Obdobně z rovnice (8) vyjádříme z^u_{t+1} a dosadíme do rovnice (7). Výsledkem je poté rovnice (9)

$$\begin{aligned} z^u_t &= V_{22}^{-1} z^u_{t+1} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \\ z^u_{t+1} &= V_{22}^{-1} z^u_{t+2} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_{t+1} \\ z^u_t &= V_{22}^{-2} z^u_{t+2} - V_{22}^{-2} D_2 \epsilon_{t+1} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \end{aligned} \tag{9}$$

Pokud výše naznačený postup budeme aplikovat nekonečně mnohokrát, dojdeme k následujícímu výsledku:

$$z^u_t = \underbrace{(V_{22}^{-1})^{\infty} z^u_{t+\infty}}_{=0} - \sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}. \tag{10}$$

Protože matice V_{22} patří k nestabilní části řešení, má tedy na diagonále vlastní čísla větší než jedna. Tedy její inverze V_{22}^{-1} má na diagonále převrácené hodnoty matice V_{22}, tj. čísla menší než jedna. Pokud ji budeme nekonečně mnohokrát umocňovat, tak tyto hodnoty budou konvergovat k nule. Můžeme tedy psát:

$$z^u_t = -\sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}$$

1.4 Stabilní část

Nyní se můžeme pustit do řešení stabilní (horní) části vektoru z.

$$z^s_{t+1} = V_{11} z^s_t + D_1 \epsilon_t. \tag{11}$$

K vyřešení této diferenční rovnice potřebujeme znát počáteční podmínku, kterou získáme následujícím způsobem. Vektor x_t můžeme rozdělit na následující složky (predeterminovaná a nepredeterminovaná část):

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^{pred.} \\ \hline x_t^{unpred.} \end{bmatrix}$$

[2] Veličiny jsou označené horním indexem s jako *stable* a u jako *unstable*.

Protože $x_t = Pz_t$ můžeme soustavu rovnic pro názornost napsat jako

$$P\left[\frac{z_t^s}{z_t^u}\right] = \left[\frac{x_t^{pred.}}{x_t^{unpred.}}\right]$$

Matice P má tuto strukturu

$$P = \left[\begin{array}{c} P_{11}P_{12} \\ P_{21}P_{22} \end{array}\right]$$

Horní část soustavy můžeme rozepsat

$$P_{11}z_t^s + P_{12}z_t^u = x_t^{pred.}$$

kde z_t^u jsme již vypočítali, $x_t^{pred.}$ v čase t známe. Snadno pak můžeme dopočítat z_t^s.

$$z_t^s = P_{11}^{-1}(x_t^{pred.} - P_{12}z_t^u)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (11) a iterací získáme celou trajektorii z_{t+k}. Konečné řešení soustavy pak dostaneme zpětnou transformací

$$x_t = Pz_t$$

1.5 BK podmínka

Pokud by Blanchard-Kahnova podmínka nebyla splněna, můžou nastat dva případy s těmito důsledky:

1. Počet stabilních vlastních čísel $<$ počet predeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava nemá ani jedno stabilní řešení

2. Počet stabilních vlastních čísel $>$ počet predeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho stabilních řešení

2 Příklad

Nasimulujte model (obsahující vpředhledící veličiny):

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha y_{t-1} + \beta r_t + \omega_t \\
\pi_t &= \gamma \pi_{t-1} + (1-\gamma)E_t\pi_{t+1} + \delta y_t + \chi_t \\
r_t &= i_t - E_t\pi_{t+1} \\
i_t &= \lambda y_t + \kappa E_t\pi_{t+1} + \xi_t
\end{aligned}$$

y_t je mezera výstupu, π_t míra inflace, i_t nominální úroková míra, r_t reálná úroková míra; α, β, γ, δ, λ, κ jsou parametry; ω_t, χ_t, ξ_t jsou náhodné složky. Parametry nakalibrujte těmito hodnotami: $\alpha = 0.8$, $\beta = -0.6$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.3$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 1.5$

Reference

[1] BLANCHARD, O.; KAHN, C. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, Volume 48, Issue 5 (Jul., 1980), 1305-1312.

[2] KLEIN, P. Using the generalized Schur form to solve a multivariate linear rational expectations model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Volume 24, Issue 10, (Sept., 2000), 1405-1423.