Základy ekonometrie

XI. Vektorové autoregresní modely

Obsah tématu

Úvod

- Předpoklad stacionarity proměných.
- Grangerovy kauzality v kontextu $ADL(p,q)$:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \alpha_1 + \delta_1 t + \rho_{11} Y_{t-1} + \ldots + \rho_{1p} Y_{t-p} \\
&\quad + \beta_{11} X_{t-1} + \ldots + \beta_{1q} X_{t-q} + \epsilon_{1t}, \\
X_t &= \alpha_2 + \delta_2 t + \rho_{21} Y_{t-1} + \ldots + \rho_{2p} Y_{t-p} \\
&\quad + \beta_{21} X_{t-1} + \ldots + \beta_{2q} X_{t-q} + \epsilon_{2t},
\end{aligned}
$$

- Ukázka *VAR* modelu (rozšíření *AR* modelu).

VAR model

- Standardní volba zpoždění $\times$ pro více proměnných „náročné“.
- Obvyklá volba $p = q \Rightarrow$ stejná zpoždění pro všechny proměnné.
- $VAR(p)$ model pro X, Y a Z:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \alpha_1 + \delta_1 t + \rho_{11} Y_{t-1} + \ldots + \rho_{1p} Y_{t-p} + \beta_{11} X_{t-1} + \ldots + \beta_{1p} X_{t-p} \\
&\quad + \kappa_{11} Z_{t-1} + \ldots + \kappa_{1p} Z_{t-p} + \epsilon_{1t}, \\
Y_t &= \alpha_2 + \delta_2 t + \rho_{21} Y_{t-1} + \ldots + \rho_{2p} Y_{t-p} + \beta_{21} X_{t-1} + \ldots + \beta_{2p} X_{t-p} \\
&\quad + \kappa_{21} Z_{t-1} + \ldots + \kappa_{2p} Z_{t-p} + \epsilon_{2t}, \\
Z_t &= \alpha_3 + \delta_3 t + \rho_{31} Y_{t-1} + \ldots + \rho_{3p} Y_{t-p} + \beta_{31} X_{t-1} + \ldots + \beta_{3p} X_{t-p} \\
&\quad + \kappa_{31} Z_{t-1} + \ldots + \kappa_{3p} Z_{t-p} + \epsilon_{3t}.
\end{aligned}
$$

- Analogicky $VAR(p)$ pro více proměnných.

Odhad VAR modelu

- Stacionarita řad $\rightarrow$ odhad a testování standardní.
- OLS odhad každé rovnice $+$ t-statistiky resp. p-hodnoty.
- Existují i jiné odhadové metody.
- Neomezený *VAR* model $\rightarrow$ vydatný OLS odhad (pokud splněny klasické předpoklady pro náhodnou složku).
- Omezený *VAR* (např. $\beta_{31} = \beta_{32} = 0$): existence vydatnějších estimátorů.

Použití VAR modelů

- Snadnost použití $\times$ proč používat?
- Testování Grangerovských kauzalit.
- Modely z ekonomické teorie $\rightarrow$ kauzalita (i v případě kointegrace nemusí být kauzalita zřejmá).
- *VAR* modely: minulost ovlivňuje současné hodnoty, ale ne naopak.
- Kritika: „ateoretická“ podstata (nevycházejí z ekonomické teorie) $\times$ dokáží popsat chování.
- Příklad: GDP, nabídka peněz, úroková sazba, cenová hladina $\rightarrow$ IS-LM model.
- *VAR* model: modelování závislosti proměnných na zpožděných hodnotách (není vztah mezi empirickým *VAR* modelem a teoretickým makroekonomickým modelem).

Výhoda VAR modelů

- *VAR* modely pro prognostické účely.
- Lepší predikční schopnosti než standardní makroekonomické modely + jednoduché použití $\rightarrow$ využití v praxi (centrální banky apod., i když spíše jako podpůrné modely).
- Po odhadu: problém s věcnou interpretací parametrů $\times$ analýza chování (impulzní odezvy).
- Optimální délka zpoždění: informační kritéria, F-statistiky, t-statistiky.

Obsah tématu

Úvod

- Problém prognózování – samostatná oblast.
- Jen úvod $\rightarrow$ ekonometrické programy provedou základní předpověď jedním kliknutím.
- Zaměření se na *VAR* modely $\times$ analogie platná i pro *AR* modely.

Příklad $VAR(1)$

- $t = 1, \ldots, T$ $\rightarrow$ předpověď $T+1$, $T+2$, atd.
- $VAR(1)$ pro X a Y:

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha_1 + \delta_1 t + \rho_{11} Y_{t-1} + \beta_{11} X_{t-1} + \epsilon_{1t}, \\ X_t &= \alpha_2 + \delta_2 t + \rho_{21} Y_{t-1} + \beta_{21} X_{t-1} + \epsilon_{2t}. \end{aligned}$$

- Y_{T+1} nepozorujeme $\rightarrow$ náš nejlepší odhad.

$$Y_{T+1} = \alpha_1 + \delta_1 (T+1) + \rho_{11} Y_T + \beta_{11} X_T + \epsilon_{1,T+1}.$$

- Neznáme $\epsilon_{1,T+1}$ a koeficienty $\rightarrow$ očekávané hodnoty:

$$\widehat{Y}_{T+1} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\delta}_1 (T+1) + \widehat{\rho}_{11} Y_T + \widehat{\beta}_{11} X_T.$$

Příklad $VAR(1)$ (pokračování)

- Předpověď na více období:

$$\widehat{Y}_{T+2} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\delta}_1(T+2) + \widehat{\rho}_{11}\widehat{Y}_{T+1} + \widehat{\beta}_{11}\widehat{X}_{T+1},$$
$$\widehat{X}_{T+2} = \widehat{\alpha}_2 + \widehat{\delta}_2(T+2) + \widehat{\rho}_{21}\widehat{Y}_{T+1} + \widehat{\beta}_{21}\widehat{X}_{T+1}.$$

- Bodová předpověď $\times$ intervalová předpověď.

Typy předpovědí

- Dva typy předpovědí.
- Předpověď do budoucna (*out-of-sample*): data do 2006 $\rightarrow$ předpověď pro 2007, 2008, ...
- Analýza předpovědní kvality modelu: data od 1950–2006 $\rightarrow$ odhad na datech do roku 2005 a předpověď pro 2006 (porovnání předpovědi a skutečnosti).
- Obecně: data pro $t = 1, \ldots, T$ a *VAR* odhad pro t$= 1, \ldots, \tau$ $(\tau < T)$ (rekurzivní předpověď).
- Odhad na celých datech a jednokrokové, dvoukrokové a více krokové predikce $\rightarrow$ spočítání příslušných chyb predikcí.

Obsah tématu

Princip

- Vektorová autoregrese s kointegrovanými proměnnými.
- Vektorový model korekce chyb (*VECM*).
- Pro X a Y:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \varphi_1 + \delta_1 t + \lambda_1 \epsilon_{t-1} + \gamma_{11}\Delta Y_{t-1} + \ldots + \gamma_{1p}\Delta Y_{t-p} \\ &\quad + \omega_{11}\Delta X_{t-1} + \ldots + \omega_{1q}\Delta X_{t-q} + e_{1t}, \\ \Delta X_t &= \varphi_2 + \delta_2 t + \lambda_2 \epsilon_{t-1} + \gamma_{21}\Delta Y_{t-1} + \ldots + \gamma_{2p}\Delta Y_{t-p} \\ &\quad + \omega_{21}\Delta X_{t-1} + \ldots + \omega_{2q}\Delta X_{t-q} + e_{2t}.\end{aligned}$$

- $\epsilon_{t-1} = Y_{t-1} - \alpha - \beta X_{t-1}$.
- Možnost rozšíření pro více proměnných $\rightarrow$ možno více kointegrovaných proměnných $\Rightarrow$ více členů korekce chyb v každé rovnici.

Další otázky

- Odhad v rámci ekonometrických programů + možnost využití OLS (regrese kointegrovaných proměnných a uložení reziduí → *VECM*).
- Obvykle $p = q$, standardní volba optimálního řádu zpoždění.
- Test jednotkových kořenů a kointegrace → Johansenův test (LR test pro kointegraci).
- Pokud M proměnných, možnost až $M - 1$ kointegračních vztahů (a členů korekce chyb vpro *VECM*).
- Počet kointegračních vztáhů = řád kointegrace.
- Johansenův test: potřeba specifikace řádu zpoždění a otázka zahrnutí deterministického trendu a úrovňové konstanty.

Obsah tématu

Úvod

- Shrnutí informace z *VAR* modelu.
- Analýza relativního významu jednotlivých šoků → varianční dekompozice.
- Analýza chování modelu → impulzní odezvy.

Varianční dekompozice – příklad

- Populární v oblasti makroekonomie a financí.
- Příklad: faktory ovlivňující trhy s akciemi a dluhopisy v dlouhém období.
- Zjednodušený model: neočekáváné pohyby v převisu výnosů akcií závisí na změnách v očekávání budoucího vývoje toků dividend, budoucích převisů výnosů akcií a budoucích úrokových mírách.
- Otázka: Který z faktorů nejdůležitější pro vývoj na trzích akcií a dluhopisů?

$$\mathit{uer} = \mathit{newsd} + \mathit{newser},$$

- uer = komponenta zachycující neočekávané pohyby v očekávaných výnosech; newsd = komponenta reflektující novinky o budoucích dividendách; newser = komponenta reflektující novinky o budoucích očekávaných výnosech.
- Lze vypočítat z dat a koeficientů VAR modelu.

Varianční dekompozice – příklad (pokračování)

- Varianční dekompozice: podíl variability *uer* pocházející z *newsd* (nebo *newser*).
- Pokud *newsd* a *newser* navzájem nezávislé:

$$var(uer) = var(newsd) + var(newser).$$

- Úpravou:

$$1 = \frac{var(newsd)}{var(ur)} + \frac{var(newser)}{var(uer)}.$$

- Např. $\frac{var(newsd)}{var(ur)}$ = variabilita neočekávaných výnosů vysvětlená novinkami o budoucích dividendách (lze vypočíst z *VAR* modelu).

Varianční dekompozice – další použití

- Proč dynamický vývoj na akciových trzích neměl dopad na spotřebu?
- *VECM* $\rightarrow$ varianční dekompozice: většina fluktuací na akciovém trhu chápána domácnostmi jako přechodná $\Rightarrow$ neovlivnění spotřeby.
- Dekompozice na trvalé a přechodné šoky.
- Proměnné s jednotkovým kořenem: dlouhá paměť $\rightarrow$ šok má trvalý vliv $\times$ chyba kointegrace z definice stacionární $\rightarrow$ jen přechodný efekt na proměnnou.
- Ve *VECM* proměnné s jednotkovým kořenem a stacionárním členem korekce chyb $\Rightarrow$ některé šoky permanentní vliv a některé jen přechodný $\rightarrow$ s využitím *VECM* odpovídající varianční dekompozice.

Varianční dekompozice – další použití (pokračování)

- Jednoduchá verze modelu:

$$a = permanent + transitory$$

- Permanentní a transitorní komponenta aktiva $(a) \to$ analýza variance:

$$1 = \frac{var(permanent)}{var(a)} + \frac{var(transitory)}{var(a)}.$$

- Příklady pro ilustraci $\to$ speciální literatura (oblast ekonometrie časových řad).

Impulzní odezvy

- Vliv neočekávaného šoku na současnou a budoucí hodnotu proměnné (časové řady).
- Např. centrální banka neočekávaně zvedne úrokové sazby (nebo nabídku peněz) $\rightarrow$ vliv na makroveličiny (např. HDP, inflace).
- Analýza velikosti vlivu a jeho odeznívání.
- Neočekávaný šok = prostřednictvím chybového členu.

Impulzní odezvy – $AR(1)$

- Definice funkce impulzní odezvy snadná:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Po přepsání:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \epsilon_{t-i}.$$

- Např. šok $\epsilon_{t-2} = 1 \rightarrow$ vliv na $Y_t = \rho^2$.
- Výpočet odezvy pro každý čas s, $s = 0, 1, \ldots$
- Pro $AR(1)$ vliv šoku před s obdobími na Y_t je ρ^s.

Impulzní odezvy – *VAR*

- Analogický výpočet $\times$ několik různých šoků.
- Příklad dvě proměnné s ϵ_{1t} a ϵ_{2t}: čtyři různé impulzní odezvy $\rightarrow$ $\epsilon_{1,t-s}$ na Y_t, $\epsilon_{1,t-s}$ na X_t, $\epsilon_{2,t-s}$ na Y_t, $\epsilon_{2,t-s}$ na X_t.
- Problém interpretace: např. vliv šoku do nabídky peněz na výstup $\rightarrow$ RMPY *VAR* model $\rightarrow$ vliv šoku v rovnici pro M (nebo ΔM) na Y (nebo ΔY)?
- Chyby v různých rovnicích navzájem korelovány $\Rightarrow$ šok v rovnici nabídky peněz $\neq$ šok do nabídky peněz.
- Práce s tzv. *SVAR* modely = strukturální *VAR* modely (odhad strukturálních šoků – např. Blanchardova-Quahova dekompozice).

Obsah tématu

Úvod

- Pro jednoduchý regresní model:

$$Y_i = \beta X_i + \epsilon_i$$

- $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$; $i = 1, \ldots, N$.
- Zájem o Y_{N+1} pokud známe X_{N+1}.
- Doposud *in-sample* odhad na základě $\widehat{\beta}$ a s^2.
- *Out-sample* předpověď, za předpokladu platnosti modelu (otázka správnosti předpokladu):

$$Y_{N+1} = \beta X_{N+1} + \epsilon_{N+1}$$

Předpověď jako očekávaná hodnota

- Očekávaná hodnota (podmíněná pozorováním):

$$E\left(Y_{N+1}\right)=E\left(\beta X_{N+1}+\epsilon_{N+1}\right)=\beta X_{N+1}+E\left(\epsilon_{N+1}\right)=\beta X_{N+1}$$

- Nahrazení odhady β:

$$\widehat{Y}_{N+1}=\widehat{\beta}X_{N+1}.$$

- Rozptyl estimátoru předpovědi:

$$var\left(\widehat{Y}_{N+1}\right)=var\left(\widehat{\beta}X_{N+1}\right)=X_{N+1}^{2}var\left(\widehat{\beta}\right).$$

- Za předpokladu normality:

$$\widehat{Y}_{N+1}\sim N\left(Y_{N+1},\frac{X_{N+1}^{2}\sigma^{2}}{\sum X_{i}^{2}}\right).$$

- Obvykle jen $s^2 \Rightarrow t$-rozdělení $(t_{N-1}) \rightarrow$ interval spolehlivosti předpovědi.
- Vícenásobná regrese: maticové vyjádření; t_{N-k} (k vysvětlujících proměnných včetně úrovňové konstanty).

Předpověď v *AR* modelu

- Data $t = 1, \dots, T$; $AR(1)$ model:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- $\widehat{Y}_{T+1} = \widehat{\rho} Y_T$ jako nestranná predikce; pokud $|\rho| < 1$, potom

$$\widehat{Y}_{T+1} \sim N\left(Y_{T+1}, \frac{Y_T^2 \sigma^2}{\sum Y_{t-1}^2}\right).$$

- V případě jednotkového kořene jiný vztah.
- Předpověď na h období:

$$\widehat{Y}_{T+h} = \widehat{\rho}^h Y_T.$$

- Analogicky pro modely *ADL*, *VAR* a *ECM* (viz ekonometrické programy – pro časové řady JMulTi).