POPTÁVKA A SLUTSKÉHO ROVNICE – řešené příklady

Poptávka

1. Spotřebitel, který nakupuje pouze statek 1 a statek 2, má užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$, kde x_1 je množství statku 1 a x_2 množství statku 2. Cena statku 1 je p_1 a cena statku 2 je p_2. Příjem spotřebitele je m.

   (a) Odvoďte poptávku po statcích 1 a 2.

   (b) Jakou část svého příjmu bude spotřebitel utrácet za statky 1 a 2?

   (c) Odvoďte Engelovy křivky pro statky 1 a 2.

   Řešení

   (a) Spotřebitel si ze své rozpočtové množiny vybírá spotřební koš s maximálním užitkem. Řešíme tedy následující úlohu:

   $$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

   $$\text{při omezení} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m.$$

   Spotřebitel má Cobb-Douglasovy preference. Výdaje spotřebitele se budou rovnat jeho příjmu, tedy $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$. Navíc platí, že při optimálním volbě bude mít jeho linie rozpočtu stejný sklon jako indiferenční křivka, tedy $MRS = -p_1/p_2$. Optimální spotřební koš (x_1^*, x_2^*) je tedy řešením následujících dvou rovnic o dvou neznámých:

   $$\text{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}$$

   $$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m.$$

   Z první rovnice si můžeme vypočítat poměr, ve kterém budou oba statky v optimu spotřebovávány, tedy

   $$MRS = -\frac{p_1}{p_2}$$

   $$-\frac{\frac{1}{3} x_2^*}{\frac{2}{3} x_1^*} = -\frac{p_1}{p_2}$$

   $$x_2^* = \frac{2p_1}{p_2} x_1^*. \tag{1}$$

   Po dosazení do linie rozpočtu si vyjádříme poptávkovou funkci pro statek 1

   $$m = p_1 x_1^* + p_2 \frac{2p_1}{p_2} x_1^*$$

   $$m = 3p_1 x_1^*$$

   $$x_1^* = \frac{m}{3p_1}.$$

   Dosazením do vztahu (1) získáme poptávkovou funkci pro statek 2

   $$x_2^* = \frac{2p_1}{p_2} \frac{m}{3p_1}$$

   $$x_2^* = \frac{2m}{3p_2}.$$

   (b) Podíl příjmu vynaložený na statek 1 dostaneme tak, že vynásobíme poptávané množství statku 1 cenou statku 1, a výsledné výdaje na tento statek podělíme příjmem spotřebitele. Místo poptávaného množství x^* pak dosadíme $\frac{m}{3p_1}$:

   $$\frac{p_1 x_1^*}{m} = \frac{p_1}{m} \frac{m}{3p_1}.$$

   $$\frac{p_1 x_1^*}{m} = \frac{1}{3}.$$

   Podobně postupujeme u statku 2:

   $$\frac{p_1 x_1^*}{m} = \frac{p_1}{m} \frac{2m}{3p_1}.$$

   $$\frac{p_1 x_1^*}{m} = \frac{2}{3}.$$

   (c) Engelovu křivku pro statek 1 odvodíme z poptávkové funkce $x_1^* = \frac{m}{3p_1}$ tak, že si vyjádříme příjem jako optimálního množství. Engelova křivka pro statek 1 je

   $$m(x_1^*) = 3x_1^* p_1.$$

   Engelova křivka pro statek 2 je

   $$m(x_2^*) = \frac{3}{2} x_2^* p_2.$$

2. Spotřebitel může nakupovat pouze dva statky, statek 1 a statek 2. Spotřebitel má užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.

   (a) Odvoďte poptávku spotřebitele po statcích 1 a 2 a Engelovu křivka pro statek 1 obecně pro ceny statků p_1 a p_2 a příjem spotřebitele m.

   (b) Jaká budou poptávaná množství statku 1 a 2 při cenách $p_1 = 1$ a $p_2 = 4$ a příjmu $m_1 = 12$. Jaká budou poptávaná množství, pokud příjem klesne na $m_2 = 3$?

Řešení

(a) Spotřebitel si ze své rozpočtové množiny vybírá spotřební koš s maximálním užitkem. Řešíme tedy následující úlohu:

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$$

$$\text{při omezení} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \le m.$$

Preference spotřebitele jsou monotónní (a spojité). Výdaje na spotřební koš se rovnají příjmu spotřebitele. Optimalizační úloha je tedy

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$$

$$\text{při omezení} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

Z linie rozpočtu si můžeme vyjádřit množství statku 2

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1x_1}{p_2}. \tag{2}$$

Dosazením zpět do užitkové funkce získáme neomezenou optimalizační úlohu s jednou neznámou

$$\max_{x_1} u(x_1) = \sqrt{x_1} + \frac{m}{p_2} - \frac{p_1x_1}{p_2}.$$

Množství statku 1 x_1^*, pro které má tato funkce extrém, najdeme tak, že položíme první derivaci rovnou nule:

$$\frac{du(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^*}} - \frac{p_1}{p_2} = 0.$$

$$x_1^* = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2 = \frac{p_2^2}{4p_1^2}.$$

Všiměte si, že poptávané množství x_1^* závisí pouze na cenách p_1 a p_2 a nezávisí na příjmu spotřebitele m.

Nyní si ověříme, zda je tento extrém maximum nebo minimum pomocí druhé derivace:

$$\frac{d^2u(x_1)}{dx_1^2} = -\frac{1}{4{x_1^*}^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Protože spotřebovávané množství x_1^* je nezáporné číslo, druhá derivace je záporná. Spotřebitel tedy při množství x_1^* maximalizuje užitek.

Spotřebitel si tedy koupí x_1^* jednotek statku 1, pokud má na to dostatečně velký příjem, tedy pokud $m \ge p_1x_1^*$. V případě, že mu jeho příjem na zakoupení množství x_1^* nebude stačit, bude mít tato úloha rohové řešení. Pokud má spotřebitel konvexní indiferenční křivky, bude při nízkém rozpočtu celá indiferenční křivka strmější než linie rozpočtu. Spotřebitel pak bude poptávat maximální dostupné množství statku 1 m/p_1 (viz obrázek na konci příkladu).

Poptávka spotřebitele po statku x_1^d je tedy

$$x_1^d = \begin{cases} x_1^* & \text{když } m \ge p_1x_1^*, \\ \frac{m}{p_1} & \text{když } m < p_1x_1^*. \end{cases}$$

Pomocí vztahu (2) pak odvodíme poptávku po statku 2

$$x_2^d = \begin{cases} x_2^* = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1x_1^*}{p_2} & \text{když } m \ge p_1x_1^*, \\ 0 & \text{když } m < p_1x_1^*. \end{cases}$$

(b) Při cenách $p_1 = 1$ a $p_2 = 4$ bude

$$x_1^* = \frac{p_2^2}{4p_1^2} = 4.$$

Pokud je příjem spotřebitele $m_1 = 12$, platí, že $m_1 > p_1x_1^*$. Poptávaná množství obou statků budou

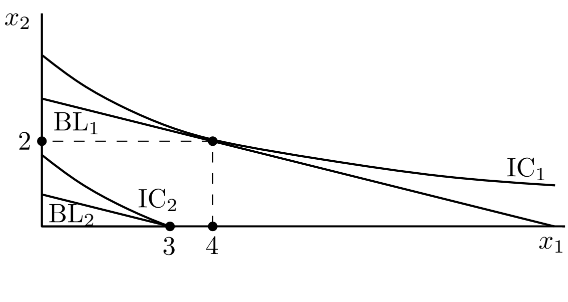
$$x_1^d = x_1^* = 4,$$

$$x_2^d = \frac{m_1 - p_1x_1^*}{p_2} = 2.$$

Pokud příjem klesne na $m_2 = 3$, bude spotřebitel nakupovat pouze statek 1. Poptávaná množství obou statků pak budou

$$x_1^d = \frac{m_2}{p_1} = 3,$$

$$x_2^d = 0.$$



Slutského rovnice

3. Spotřebitel může nakupovat pouze dva statky, statek 1 a statek 2. Má užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, kde x_1 je množství statku 1 a x_2 množství statku 2. Příjem spotřebitele je $m = 20$. Dříve byly ceny statků $p_1 = 1$ a $p_2 = 1$. Nyní cena se cena statku 2 zvýšila na $p_2' = 2$.

   (a) Spočítejte původní a nový optimální spotřební koš.

   (b) Jak velký by musel být příjem spotřebitele, aby si mohl při nových cenách dovolit svůj původní spotřební koš?

   (c) O kolik jednotek se změní spotřeba statku 2 kvůli Slutského substitučnímu efektu? O kolik kvůli důchodovému efektu?

   Řešení

   (a) Kdybychom spočítali příklad 1(a) pro užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, získali bychom poptávkové funkce

   $$x_1 = \frac{m}{2p_1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{m}{2p_2}.$$

   Dosazením do těchto poptávek získáme optimální spotřební koš při původních cenách $(x_1, x_2) = (10, 10)$ a optimální spotřební koš při nových cenách $(x_1', x_2') = (10, 5)$.

   (b) Aby si spotřebitel s novou cenou statku 2 mohl dovolit původní spotřebu, jeho příjem by musel být

   $$m' = m + \Delta m = m + (p_2' - p_2)x_2 =$$

   $$= 20 + 10 = 30.$$

   (c) Substituční efekt je změna v poptávaném množství statku při změně ceny a kompenzovaném příjmu, tedy

   $$\Delta x_2^s = x_2(p_2', m') - x_2(p_2, m) =$$

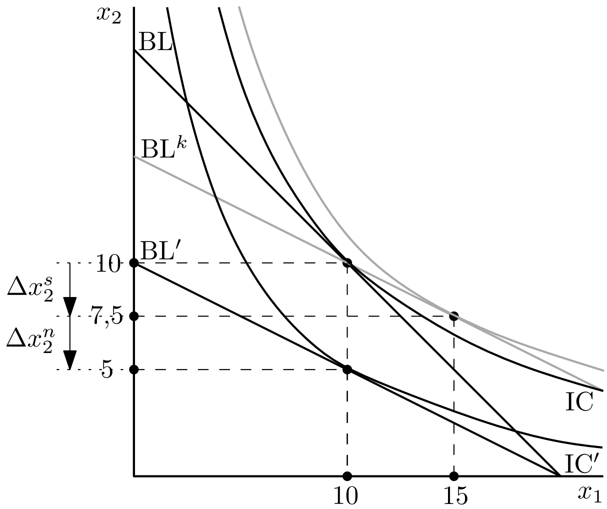
   $$= 7,5 - 10 = -2,5.$$

   Důchodový efekt je změna v poptávaném množství statku při nových cenách a změně důchodu z kompenzovaného na nekompenzovaný, tedy

   $$\Delta x_2^n = x_2(p_2', m) - x_2(p_2', m') =$$

   $$= 5 - 7,5 = -2,5.$$

Následující obrázek znázorňuje řešení tohoto příkladu. Při původní linii rozpočtu BL spotřebitel nakupuje koš $(x_1, x_2) = (10, 10)$. Po změně ceny statku 2 si spotřebitel může právě dovolit tento koš při linii rozpočtu s kompenzovaným příjmem BL^k (šedá barva). Zvolí si ale spotřební koš (15, 7,5). Substituční efekt je rozdíl ve spotřebě statku 2 při liniích rozpočtu BL^k a BL: $\Delta x_2^s = 7{,}5 - 10 = -2{,}5$. Při nové linii rozpočtu BL' spotřebitel nakupuje koš $(x_1, x_2) = (10, 5)$. Důchodový efekt odpovídá rozdílu ve spotřebě statku 2 při liniích rozpočtu BL' a BL^k: $\Delta x_2^n = 5 - 7{,}5 = -2{,}5$.



4. Spotřebitel, který může nakupovat pouze dva statky, statek 1 a statek 2, má příjem $m = 80$ a užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, kde x_1 a x_2 jsou množství statků 1 a 2. Cena statku 1 je $p_1 = 4$ a cena statku 2 je $p_2 = 10$.

   (a) Jak velký bude Slutského substituční a důchodový efekt poklesu ceny statku 2 na $p_2' = 5$?

   (b) Jak velký bude Slutského substituční a důchodový efekt poklesu ceny statku 1 z na $p_2' = 5$ na $p_2'' = 4$?

   Řešení

   (a) Pro výpočet Slutského substitučního a důchodového efektu potřebujeme znát poptávku po statku 2, která se rovná

   $$x_2 = \begin{cases} m/p_2 & \text{když } p_2 < 2p_1, \\ \text{mezi 0 a } m/p_2 & \text{když } p_2 = 2p_1, \\ 0 & \text{když } p_2 > 2p_1. \end{cases}$$

   Slutského substituční efekt měří změnu v poptávaném množství při změně ceny a při kompenzovaném příjmu.

   Pro výpočet kompenzovaného příjmu potřebujeme znát původní spotřebu statku x_2, která je $x_2 = 0$, protože $p_2 > 2p_1$. Kompenzovaný příjem je

$$m' = m + \Delta m = m + (p_2' - p_2)x_2 =$$

$$= 80 + (5 - 10) \times 0 = 80.$$

Protože $p_2' < 2p_1$, substituční efekt změny ceny z p_2 na p_2' je

$$\Delta x_2^s = x_2(p_2', m') - x_2(p_2, m) =$$

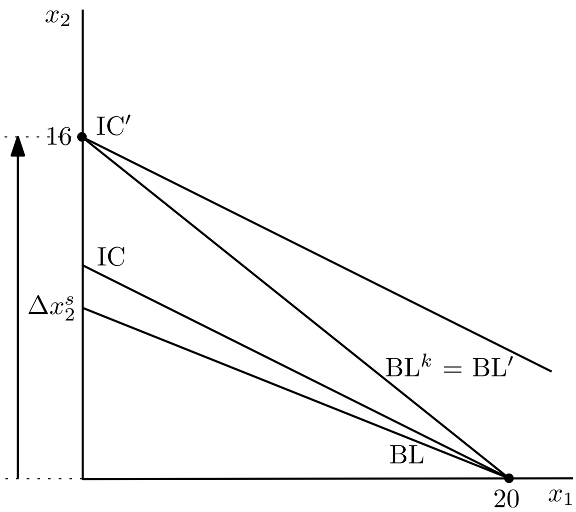
$$= m'/p_2' - 0 = 16 - 0 = 16.$$

Důchodový efekt měří změnu v poptávaném množství, když se při nových cenách (p_1, p_2') změní příjem z m' na m, tedy

$$\Delta x_2^n = x_2(p_2', m) - x_2(p_2', m') =$$

$$= m/p_2' - m'/p_2' = 16 - 16 = 0.$$

Následující obrázek znázorňuje řešení tohoto příkladu. Při původní linii rozpočtu BL je optimum spotřebitele $(x_1, x_2) = (20, 0)$. Při kompenzované linii rozpočtu BL^k si spotřebitel koupí koš $(0, 16)$. Substituční efekt je pak $\Delta x_2^s = 16 - 0 = 16$. Nová linie rozpočtu BL' se shoduje s linií rozpočtu s kompenzovaným příjmem BL^k. Spotřebitel bude poptávat koš $(0, 16)$ a jeho důchodový efekt bude $\Delta x_2^n = 16 - 16 = 0$.



(b) Původní cena je nyní $p_2' = 5$. Poptávané množství statku 2 při této ceně je $x_2' = m/p_2' = 16$ a kompenzovaný příjem je nyní

$$m'' = m + \Delta m = m + (p_2'' - p_2')x_2' =$$

$$= 80 + (4 - 5) \times 16 = 64.$$

Substituční efekt změny ceny z p_2' na p_2'' je

$$\Delta x_2^s = x_2(p_2'', m'') - x_2(p_2', m) =$$

$$= m''/p_2'' - m/p_2' = 16 - 16 = 0.$$

Důchodový efekt je

$$\Delta x_2^n = x_2(p_2'', m) - x_2(p_2'', m'') =$$

$$= m/p_2'' - m''/p_2'' = 20 - 16 = 4.$$

Následující obrázek ukazuje, že spotřeba při původní linii rozpočtu BL' je $(x_1, x_2) = (0, 16)$. Při kompenzované linii rozpočtu BL^k (šedá barva) si spotřebitel koupí koš $(0, 16)$. Substituční efekt je pak $\Delta x_2^s = 16 - 16 = 0$. Při nové linii rozpočtu BL' bude spotřebován koš $(0, 20)$. Důchodový efekt je $\Delta x_2^n = 20 - 16 = 4$.