

Bayesiánská analýza

I. Základní principy a pojmy bayesiánské ekonometrie

Obsah tématu

1 Bayesiánská teorie

2 Bayesiánský výpočetní postup

Bayesiánský přístup – motivace

- Eddy, Sean R. (2004) – What is Bayesian statistics?

Obsah tématu

1 Bayesiánská teorie

2 Bayesiánský výpočetní postup

Úvod

- Cíl: obecné principy bayesiánské ekonometrie.
- Koop (2003) – kapitola 1.
- Ekonometrie:
 - odhad parametrů modelu (regresní koeficienty);
 - porovnání různých modelů (testování hypotéz);
 - předpověď.
- Bayesiánská ekonometrie – využití několika jednoduchých pravidel pravděpodobnosti = univerzálnost.

Základní principy I

- Nechť A a B označují dva jevy, $p(B|A)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu B za podmínky realizace jevu A ; souhrn toho co víme o B známe-li A .
- Bayesiánský přístup – A = něco známého (např. data); B = něco neznámého (např. koeficienty v modelu).
- Nechť y jsou data, y^* nepozorovaná data (tj. předpověď), M_i pro $i = 1, \dots, m$ je množina modelů za předpokladu, že každý závisí na parametrech θ^i .
 - Znalosti o parametrech v daném modelu – posteriorní hustota $p(\theta^i|M_i, y)$.
 - Porovnání modelů – posteriorní pravděpodobnost modelu $p(M_i|y)$.
 - Předpověď – předpovědní hustota $p(y^*|y)$.

Základní principy II

- Podmíněná pravděpodobnost A za podmínky B , označována $Pr(A|B)$ je pravděpodobnost realizace jevu A za podmínky, že nastal jev B .
- Pravidla pro podmíněnou pravděpodobnost:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(B)},$$

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(A)}.$$

Bayesův teorém

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)}$$

- Lze interpretovat nejen pro dva jevy ale i pro dvě náhodné veličiny.
- Nahrazení $Pr()$ pravděpodobnostní funkcí či hustotou pravděpodobnosti.

Odhad I

- Jeden model závisející na parametrech θ (např. regresní model s vysvětlujícími proměnnými).
- Zajímá nás posteriorní hustota a její vlastnosti $p(\theta|y)$.
- Bayesovo pravidlo:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

- Pro náš model:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)}$$

Odhad II

- $p(\theta|y)$ – otázka „Při daných datech, co víme o θ ?“.
- Bayesiánský přístup – θ je náhodná veličina.
- Klasický přístup – θ není náhodná veličina.
- V rámci odhadu lze ignorovat $p(y)$, neboť neobsahuje θ :

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta).$$

Popis výrazů

- $p(\theta|y)$ – posteriorní hustota pravděpodobnosti.
- $p(y|\theta)$ – věrohodnostní funkce.
- $p(\theta)$ – apriorní hustota pravděpodobnosti.
- \propto – „je proporcionální vzhledem“.
- $p(\theta)$ – nezávisí na datech, obsahuje nedatovou informaci o θ .

Pojetí pravděpodobnosti a nejistoty

- „Frekvencistický“ (klasický) přístup – pravděpodobnost nastání nějaké události je limitou její relativní četnosti (četnosti, se kterou událost nastává pokud se neomezeně zvyšuje množství dostupných dat).
- Problém v praxi při studiu zřídka se opakujících jevů (potřeba využití teoretických výsledků).
- Bayesovský přístup – subjektivní chápání pravděpodobnosti vyjadřující stupeň víry (přesvědčení), který je aktualizován po získání dodatečných dat.
- „Frekvencistická nejistota“ – zdrojem nejistoty je náhodnost spjatá s realizací náhodné veličiny (pravděpodobnostní rozdělení proměnných není předmětem nejistoty).
- „Bayesovská nejistota“ – pravděpodobnostní rozdělení samo o sobě nejisté (jeho možné změny a modifikace po získání nových informací)
→ nejistota je implicitně spojená s aktualizací pravděpodobnosti (apriorní pravděpodobnost → posteriorní pravděpodobnost).

Apriorní informace

- Kontraverzní – nevědeckost?
- Máme-li apriorní informaci, měli bychom ji využít.
- Lze využít i neinformativní priory.
- Empirické bayesiánské metody – prior z dat.
- Citlivostní analýza pro priory.

Predikce

- Prediktivní hustota pravděpodobnosti – $p(y^*|y)$.
- Integrací sdružené hustoty pravděpodobnosti – marginální hustota:

$$p(y^*|y) = \int p(y^*, \theta|y) d\theta$$

$$p(y^*|y) = \int p(y^*|y, \theta)p(\theta|y) d\theta$$

Porovnání modelů

- Modely M_i pro $i = 1, \dots, m$ závisí na parametrech θ^i .
- Posteriorní pravděpodobnost modelů $p(M_i|y)$.
- Bayesovo pravidlo – $B = M_i$ a $A = y$:

$$p(M_i|y) = \frac{p(y|M_i)p(M_i)}{p(y)}$$

- $p(M_i)$ – apriorní pravděpodobnost modelu.
- $p(y|M_i)$ – marginální věrohodnost.

Výpočet marginální věrohodnosti

- Posteriorní hustotu pravděpodobnosti lze zapsat jako:

$$p(\theta^i|y, M_i) = \frac{p(y|\theta^i, M_i)p(\theta^i|M_i)}{p(y|M_i)}$$

- Integrací obou stran dle θ^i lze získat:

$$p(y|M_i) = \int p(y|\theta^i, M_i)p(\theta^i|M_i)d\theta^i$$

- Marginální pravděpodobnost modelu – prior a věrohodnostní funkce.

Posterioerní podíl šancí

- Posterioerní podíl šancí:

$$PO_{ij} = \frac{p(M_i|y)}{p(M_j|y)} = \frac{p(y|M_i)p(M_i)}{p(y|M_j)p(M_j)}$$

- Posterioerní podíl šancí a marginální pravděpodobnost modelu.
- Bayesův faktor:

$$BF_{ij} = \frac{p(y|M_i)}{p(y|M_j)}$$

Obsah tématu

1 Bayesiánská teorie

2 Bayesiánský výpočetní postup

Prezentace výsledků

- Analogicky ke klasickému přístupu – bodové odhady a konfidenční intervaly.
- Obvyklý bodový odhad – posteriorní střední hodnota.
- Nechť θ je k -prvkový vektor, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$. Posteriorní střední hodnota každého prvku vektoru je dána jako:

$$E(\theta_i|y) = \int \theta_i p(\theta|y) d\theta$$

Očekávaná hodnota I

- Necht $g()$ je funkce, pak očekávaná (střední) hodnota $E[g(X)]$ je definována pro diskrétní náhodnou veličinu X jako:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i)p(x_i)$$

- Pro spojitou náhodnou veličinu X (za podmínky $E[g(X)] < \infty$):

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx$$

Očekávaná hodnota II

- Měřítkem disperse je posteriorní standardní odchylka, tedy odmocnina posteriorního rozptylu počítaného jako:

$$\text{var}(\theta_i|y) = E(\theta_i^2|y) - E(\theta_i|y)^2$$

- Vyžaduje vyhodnotit posteriorní střední hodnotu a rovněž také:

$$E(\theta_i^2|y) = \int \theta_i^2 p(\theta|y) d\theta$$

- Pravděpodobnost, že koeficient je kladný:

$$p(\theta_i \geq 0|y) = \int_0^{\infty} p(\theta|y)$$

Charakteristiky posteriorní hustoty

- Většina charakteristik má formu:

$$E[g(\theta)|y] = \int g(\theta)p(\theta|y)d\theta$$

- $g(\theta)$ – funkce, která nás zajímá.
- Všechny vlastnosti – forma integrálu, stejně jako marginální věrohodnost a prediktivní hustota.
- Až na výjimky - nemožnost vyhodnocení integrálu analyticky.

Posterionní simulace

- Integrály v Bayesiánské analýze vyhodnocovány simulačními metodami.
- Zákon velkých čísel a centrální limitní věta.
- Zákon velkých čísel – předpokládejme náhodný výběr s posterionní hustoty $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(S)}$. Pro S jdoucí k nekonečnu konverguje výběrový průměr ke střední hodnotě $E[\theta|y]$.
- Bayesiánský přístup – využívá asymptotické teorie, ovšem asymptotické v S (pod kontrolou výzkumníka).

Monte Carlo integrace

- Nechť $\theta^{(s)}$ pro $s = 1, \dots, S$ je náhodný výběr z $p(\theta|y)$ a definujme:

$$\hat{g}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S g(\theta^{(s)}).$$

- \hat{g}_S konverguje k $E[g(\theta)|y]$ pro S jdoucí k nekonečnu.
- MC integrace – aproximace $E[g(\theta)|y]$, jen pro $S = \infty$ jde chyba aproximace k nule.
- Volba S na nás – výpočetní nároky.
- Pro odhad chyby aproximace - centrální limitní věta \rightarrow numerická standardní chyba (NSE).

Počítačový software

- Většinou vlastní programy v prostředí Matlab, Gauss či R.
- Balíčky BUGS (Bayesian Analysis Using Gibbs Sampling) a BACC (Bayesian Analysis, Computation and Communication) – omezené typy modelů.
- Nástroje pro speciální typ modelů (makroekonomické modely) – Dynare toolbox a IRIS toolbox pro Matlab (případně Octave).
- Volně dostupné.