

Bayesiánská analýza

VIII. Úvod do časových řad

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

- Stavové modely.
- Hierarchická podstata – atraktivita odpovídajících metod.
- Bauwens, Lubrano, Richard – bayesiánská analýza alternativního přístup.
- Stavový zápis = jiný pohled na stejnou problematiku.

- Viz analýza autokorelovaných náhodných složek.
- $AR(p)$ proces:

$$(1 - \rho_1 L - \dots - \rho_p L^p) y_t = u_t.$$

- V podstatě lineární regresní model:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + u_t.$$

- Zobecnění:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \dots + \beta_q x_{t-q} + u_t.$$

- Řešené problémy: restriktce kladené na koeficienty, definování apriorních hustot.

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

Úvod

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- ϵ_t je i.i.d. $N(0, h^{-1})$.
- Jedinečnost = nepozorované α_t jako náhodná procházka:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- u_t je i.i.d. $N(0, \eta h^{-1})$ a ϵ_t a u_s jsou vzájemně nezávislé pro všechna t a s .
- $t = 1, \dots, T$ resp. pro α $t = 1, \dots, T - 1$.

Pojmy

- $\alpha_1 =$ počáteční podmínka.
- Rovnice měření (pozorování):

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Stavová rovnice:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + u_t.$$

- α_t má stochastický trend.

Stochastický trend

- Nestacionární vývoj řady, náhodnost trendu.
- Deterministický trend:

$$\alpha_t = \alpha + \beta t.$$

- Stochastické trendové chování:

$$\alpha_t = \alpha_1 + \sum_{j=1}^{t-1} u_j.$$

- Při zanedbání počátečních podmínek: $\text{var}(\alpha_t) = (t - 1)\eta h^{-1}$.
- α_t a α_{t-1} mají tendenci ležet blízko u sebe (tj. $E(\alpha_t | \alpha_{t-1}) = \alpha_{t-1}$).
- Stochastický trend: variabilita jako rostoucí funkce času \times povolna se měnící α_t .

Dekompozice časové řady

- Local level model:

$$y_t = \alpha_t + \epsilon_t.$$

- Trendová komponenta a nepravidelná komponenta ϵ_t .
- Trend = dlouhodobý růst ekonomiky \times nepravidelná komponenta = náhodné krátkodobé šoky.
- Stavové modely: dekompozice řady na různé složky; např. i sezónní složka.

Local level model – analýza

- Měření relativní velikosti trendu a nepravidelné složky.
- Rozptyly h^{-1} a $\eta h^{-1} \Rightarrow \eta$ jako relativní poměr variability náhodné procházky a náhodné složky.
- $\eta \rightarrow 0$ náhodná složka vypadává a $\alpha_t = \alpha_1$ pro všechna t (model $y_t = \alpha_1 + \epsilon_t \rightarrow$ fluktuace kolem konstantní úrovně).
- Pro rostoucí η roste rozptyl $u_t \Rightarrow$ narůst role stochastického trendu.
- Test $\eta = 0$ jako způsob testování jednotkového kořene.

Další interpretace a apriorní hustota

- α_t je střední hodnota (či úroveň, tedy *level*) pro y_t .
- Mění se střední hodnota \Rightarrow *local level model*.
- LRM s měnící se úrovní konstantou = *model v čase proměnných parametrů (time varying parameters model)*.
- Obecnější stavové modely: v čase proměnné parametry (regresní koeficienty) nebo v čase proměnné rozptyly náhodných složek.
- Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_T)'$ \Rightarrow definice apriorní hustoty.
- Z rovnice náhodné procházky: hierarchická apriorní hustota pro α (podobně jako model individuálních vlivů s $T = 1$).
- Bayesovské metody pro nezávislou normální-gama apriorní hustotu = odvození Gibbsova vzorkovače (viz obecný stavový model).
- Zde přirozeně kojungovaná apriorní hustota pro zavedení empirických bayesiánských metod.

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

Značení

- $y = (y_1, \dots, y_T)'$ a $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_T)'$:

$$y = I_T \alpha + \epsilon.$$

- Standardní požadavky: ϵ má vícerozměrné normální rozdělení se střední hodnotou 0_T a kovarianční maticí $h^{-1}I_T \Rightarrow$ normální lineární regresní model (α jako T -rozměrný vektor regresních koeficientů).
- Standardní podoba věrohodnostní funkce.

Značení

- Konjugovaná podoba hierarchické hustoty na základě stavové rovnice.
- *Matice prvních diferencí* rozměru $(T - 1) \times T$:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Platí: $D\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix}$.

- Stavová rovnice: $D\alpha = u$, kde $u = (u_1, \dots, u_{T-1})'$; normalita $u \Rightarrow$ stavová rovnice definuje normální hierarchickou apriorní hustotu pro $D\alpha$.

Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Apriorní hustota pro h a α_1 .
- Zápis: $y = W\theta + \epsilon$, kde

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_T - \alpha_{T-1} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0_{T-1}' \\ \iota_{T-1} & C \end{pmatrix}.$$

- ι_{T-1} je $(T - 1)$ -rozměrný vektor jedniček

Specifikace apriorních hustot – pokračování

- Lze ukázat (maticovým násobením) ekvivalenci zápisů.
- C je dolní trojúhelníková matice rozměru $(T - 1) \times (T - 1)$ se všemi nenulovými prvky rovnými jedné (inverze matice D s vynechaným prvním sloupcem).
- C má všechny prvky na a pod hlavní diagonálou rovny jedné a všechny prvky nad hlavní diagonálou rovny nule.
- Přirozeně konjugovaná apriorní hustota pro θ a h :

$$\theta, h \sim NG(\underline{\theta}, \underline{V}, \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}).$$

Specifikace apriorních hustot – dokončení

- Specifická struktura pro $\underline{\theta}$ a \underline{V} (zahrnuje apriorní informaci obsaženou ve stavové rovnici):

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{V} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11} & 0_{T-1}' \\ 0_{T-1} & \eta I_{T-1} \end{pmatrix}.$$

- $\Rightarrow \alpha_{t+1} - \alpha_t$ odpovídá normální hustotě, $N(0, \eta h^{-1})$.
- Apriorní hustota závisí na $\eta \Rightarrow$ hierarchická podoba.
- Apriorní hustota pro počáteční podmínku $\alpha_1 \sim N(\underline{\theta}_1, h^{-1} \underline{V}_{11})$.

Obsah tématu

1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- **Posteriorní hustota**
- Empirické bayesovské metody
- Empirická ilustrace

2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

3 Rozšíření

Výsledky

- Standardní výsledky z kapitoly 3.
- $p(\theta, h|y)$ odpovídá $NG(\bar{\theta}, \bar{V}, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$:

$$\bar{\theta} = \bar{V}(\underline{V}^{-1}\underline{\theta} + W'y)$$

$$\bar{V} = (\underline{V}^{-1} + W'W)^{-1}$$

$$\bar{\nu} = \underline{\nu} + T$$

$$\bar{\nu}\bar{s}^2 = \underline{\nu}s^2 + (y - W\bar{\theta})'(y - W\bar{\theta}) + (\bar{\theta} - \underline{\theta})'\underline{V}^{-1}(\bar{\theta} - \underline{\theta})$$

Zpětná parametrizace

- $p(\theta|h, y)$ je normální + lin. kombinace normálních veličin je normální náhodná veličina.
- Pokud $p(\theta, h)$ odpovídá $NG(\bar{\theta}, \bar{V}, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$, je posteriorní rozdělení (α, h) analogické rozdělení $NG(\bar{\alpha}, \bar{V}_\alpha, \bar{s}^{-2}, \bar{\nu})$, kde

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= W\bar{\theta}, \\ \bar{V}_\alpha &= W\bar{V}W' .\end{aligned}$$

- Analytické výsledky (analyticky např. porovnání modelů).

Další otázky

- Local level model: regresní model, kde počet regresních parametrů = počet pozorování.
- Hodnotná posteriorní analýza díky apriorní informaci.
- Proč nezískáváme degenerované posteriorní rozdělení v bodě $y = \alpha$?
- Pro $\alpha_t = y_t$ pro všechna t máme perfektně padnoucí model ($\epsilon_t = 0$ pro všechna t).
- Lze ukázat, že věrohodnostní funkce nabývá v tomto bodě nekonečně velké hodnoty \times bayesiánská posteriorní hustota není do tohoto bodu nekonečné věrohodnosti umístěna díky apriorní informaci.
- Stavová rovnice říká: α_{t+1} a α_t leží velmi blízko u sebe \rightarrow posteriorní hustota dále od bodu perfektní shody modelu s daty.
- Tento jev nazýván *vyhlazením (smoothing)* stavového vektoru.

Obsah tématu

1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- Posteriorní hustota
- **Empirické bayesovské metody**
- Empirická ilustrace

2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

3 Rozšíření

Úvod

- Subjektivní formulace apriorní hustoty nebo neinformativí apriorní hustota.
- V našem případě volba: $\underline{\theta}$, \underline{V} , \underline{s}^{-2} , $\underline{\nu}$ nebo neinformativních hodnoty $\underline{\nu} = 0$ a $\underline{V}^{-1} = 0_{T \times T}$ ($\underline{\theta}$ a \underline{s}^{-2} irelevantní).
- Nevýhody obou přístupů.
- Empirické bayesovské metody: hlavně u hierarchických apriorních hustot \times využitelné všude \times kritika „dvojpočtu“ s daty.
- Odhad apriorních hyperparametrů z dat \rightarrow ideální nástroj marginální věrohodnost (hledání apriorních hyperparametrů zvyšujících marginální věrohodnost) \times výpočetně náročné \Rightarrow jen pro některé parametry.

Local level model – úvod

- Apriorní hustota: pět hyperparametrů; η , $\underline{\theta}_1$, \underline{V}_{11} , \underline{s}^{-2} a $\underline{\nu}$.
- Nejvýznamnější η (podíl komponenty náhodné procházky ve stavovém modelu).
- Zjevná „neinformativní“ volba $\eta \rightarrow \infty$ nesmyslná \rightarrow stochastický trend převáží nad nesystematickou komponentou (dost "informativní").
- Zaměření na η + předpoklad o schopnosti subjektivně definovat $\underline{\theta}_1$, \underline{V}_{11} , \underline{s}^{-2} a $\underline{\nu}$.

Marginální věrohodnost

- Marginální věrohodnost:

$$p(y|\eta) = c \left(\frac{|\underline{V}|}{|\overline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\underline{\nu S}^2)^{-\frac{\underline{\nu}}{2}},$$

kde

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}}{2}\right) (\underline{\nu S}^2)^{\frac{\underline{\nu}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}}{2}\right) \pi^{\frac{T}{2}}}.$$

- Marginální věrohodnost jako funkce η .
- Standardní přístup: $\eta = \hat{\eta}$, pro které bude maximalizována $p(y|\eta) \rightarrow$ vstupuje do apriorních hustot + standardní posteriorní analýza.
- Pro local level model: grid search method = potenciální hodnoty η v „mřížce“ $\rightarrow \hat{\eta}$ maximalizující $p(y|\eta)$.

Formální přístup

- η jako parametr.
- $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$, kde $p(\eta)$ je apriorní hustota:

$$p(\eta|y) = c \left(\frac{|\overline{V}|}{|\underline{V}|} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{\nu S^2})^{-\frac{\overline{\nu}}{2}} p(\eta).$$

- Posterioční hustota pro analýzu η .
- Pokud zájem i o ostatní parametry: $p(\theta, h, \eta|y) = p(\theta, h|y, \eta)p(\eta|y)$.
- $p(\theta, h|y, \eta)$ je normální-gama hustota podmíněná specifickou hodnotou η (platí předchozí posterioční výsledky) a $p(\eta|y)$ je jednorozměrná hustota.

Generování η

- MC integrace: výběr z $p(\eta|y) \propto p(y|\eta)p(\eta)$ a tímto podmíněn výběr z $p(\theta, h|y, \eta)$.
- Výběr z $p(\eta|y)$ podle $p(\eta)$: možnost aproximací diskrétní alternativou.
- Vyhodnocení $p(\eta|y)$ v B různých bodech mřížky $\eta_1, \dots, \eta_B \rightarrow p(\eta_1|y), \dots, p(\eta_B|y)$.
- Výběry η z diskrétního rozdělení (definované pravděpodobnostmi $p(\eta = \eta_i) = p(\eta_i|y)$ pro $i = 1, \dots, B$) \rightarrow aproximativně odpovídají výběrům z $p(\eta|y)$ (rostoucí B vede k růstu kvality aproximace).

Další otázky

- Vyžadován výběr $\underline{\theta}_1$, \underline{V}_{11} , \underline{s}^{-2} a $\underline{\nu}$ (případně $p(\eta)$ při využití druhého přístupu).
- Obvyklá neinformativních volba (ve většině modelů dobře funguje).
- Nefunguje pro případ local level modelu.
- Nastavení $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0 \rightarrow$ hodnoty \underline{s}^{-2} a $\underline{\theta}_1$ irelevantní $\Rightarrow p(\theta, \sigma^{-2} | y, \eta)$ je dobře definovaná posteriorní hustota.

Problémy

- Nedeterminovatelná integrační konstanta \times při zaměření jen na η (nebo modely se stejnou apriorní hustotou) $\rightarrow c$ buď do vztahů nevstoupí nebo se vykrátí.
- Vážnější problém: $\overline{\nu s^2}$ se blíží nule pro $\eta \rightarrow \infty$.
- Neinformativní výsledky: $\bar{\theta} = (W'W)^{-1}W'y$ a $y - W\bar{\theta} = 0_T \rightarrow$ marginální věrohodnost nekonečno (bez důkazu).
- Empirická bayesovská analýza nastaví $\hat{\eta} \rightarrow \infty$ pro jakoukoliv datovou sadu $\Rightarrow E(\alpha|y) = y$ (žádné vyhlazení).
- Závěr: empirické bayesovské metody selhávají v rámci local level model při $\underline{\nu}$ a \underline{V}_{11}^{-1} na neinformativních hodnotách.
- Důvod: počet vysvětlujících proměnných je roven počtu pozorování (přesné proložení dat).

Problémy – pokračování

- Nastavením $\underline{\nu} > 0$ nebo $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$ (a volbou \underline{s}^2 nebo $\underline{\theta}_1$ adekvátním způsobem) \rightarrow možné použití empirických bayesovských metod.
- $\underline{\nu s}^2$ se pro $\eta \rightarrow \infty$ nebude blížit nule \Rightarrow nepotřebná informativní apriorní hustota pro h i θ_1 .
- Pro alternativní přístup (η jako parametr) problém pro $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$ a pro nepravý prior pro η .
- V případě $\underline{\nu} = \underline{V}_{11}^{-1} = 0$ a $p(\eta)$ jako nepravou $U(0, \infty) \rightarrow p(\eta|y)$ není platná hustota.
- Pro $\underline{\nu} > 0$ nebo $\underline{V}_{11}^{-1} > 0$ anebo $p(\eta)$ jako platná p.d.f. $\rightarrow p(\eta|y)$ platná posteriorní hustota.
- Pro η jako neznámý parametr \rightarrow bayesiánská analýzu v případě informativního η , h nebo θ_1 .

Obsah tématu

1 Local level model

- Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
- Posteriorní hustota
- Empirické bayesovské metody
- **Empirická ilustrace**

2 Obecný stavový model

- Bayesovský výpočet
- Empirická ilustrace

3 Rozšíření

Příklad

- BUDE ČASEM DOPLNĚNO!

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

Úvod

- Obecnější (ne zcela) stavový model:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + \epsilon_t,$$

kde

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + u_t.$$

- α_t je $p \times 1$ rozměrný vektor obsahující p stavových rovnic.
- Předpokládáme, že ϵ_t je i.i.d. $N(0, h^{-1})$ × u_t je $p \times 1$ rozměrný vektor i.i.d. $N(0, H^{-1})$.
- ϵ_t a u_s vzájemně nezávislé pro všechna s a t .
- X_t a Z_t vektory rozměru $1 \times k$ a $1 \times p$ obsahující vysvětlující proměnné a (nebo) známé konstanty.
- Matice T_t známých konstant rozměru $p \times p$ (možné i neznámé parametry).

Varianty

- Local level model: $p = 1$, $k = 0$, $T_t = 1$ a $Z_t = 1$.
- Normální lineární regresní model: $Z_t = 0$.
- Normální lineární regresní model s v čase proměnnými parametry: Z_t obsahuje některé nebo všechny vysvětlující proměnné.
- *Strukturální modely časových řad*: lze převést do podoby stavového modelu.
- Jeden z běžných strukturálních modelů časových: *local linear trend model*:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t + \nu_t + \xi_t$$

$$\nu_{t+1} = \nu_t + \zeta_t$$

- ξ_t je i.i.d. $N(0, \sigma_\xi^2)$, ζ_t je i.i.d. $N(0, \sigma_\zeta^2)$ a všechny náhodné chyby jsou vzájemně nezávislé.

Local linear trend model

- Stavová podoba:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \nu_t \end{pmatrix}$$

$$u_t = \begin{pmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{pmatrix}$$

$$T_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$$

a $\beta = 0$.

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

Úvod

- Metody posteriorní analýzy v řadě komplikovaných modelů lze odvodit jednoduchou kombinací výsledků jednodušších modelů.
- Pro posteriorní simulaci nastává komplikace toho rázu, že posteriorní hustoty pro α nebudou v čase nezávislé $\rightarrow \alpha_t$ a α_{t-1} nebudou vzájemně nezávislé.
- Nejsme schopni najednou generovat výběry pro $\alpha_t \rightarrow$ přímá implementace Gibbsova vzorkovače by zahrnovala výběry z T -rozměrného normálního rozdělení.
- De Jong a Shephard (1995): efektivní metoda Gibbsova vzorkovače pro tuto třídu modelů.

Postup

- V případě známého α_t pro $t = 1, \dots, T \rightarrow$ normální lineární regresní model:

$$y_t^* = X_t \beta + \epsilon_t,$$

kde $y_t^* = y_t - Z_t \alpha_t$.

- Gibbsův vzorkovač s obohacenými daty (*data augmentation*).
- Zavedení nepozorovaných dat či latentních proměnných (resp. latentních dat).
- Gibbsův vzorkovač v závislosti na $p(\beta, h|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$ bude mít známou podobu.
- Pokud známé α_t pro $i = 1, \dots, T \rightarrow$ stavové rovnice jako varianta SUR modelu a $p(H|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$ má známou formu.
- Příklad T_t s neznámými parametry: $p(H, T_1, \dots, T_t|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T) \rightarrow$ „v čase neměnném“ ($T_1 = \dots = T_t$): $p(H, T_1, \dots, T_t|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T)$ podoba SUR modelu.

Apriorní hustoty

- Gibbsův vzorkovač, pokud umíme výběry z $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$.
- β a h s nezávislou normální-gama apriorní hustotou, matice H má Wishartovu apriorní hustotu a $\alpha_1, \dots, \alpha_T$ apriorní hustotu implikovanou stavovou rovnicí:

$$p(\beta, h, H, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = p(\beta)p(h)p(H)p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | H),$$

kde

$$p(\beta) = f_N(\beta | \underline{\beta}, \underline{V}),$$

$$p(h) = f_G(h | \underline{s}^{-2}, \underline{\nu}),$$

$$p(H) = f_W(H | \underline{\nu}_H, \underline{H}).$$

Hierarchická apriorní hustota stavů

- Pro $t = 0, 1, \dots, T$) a za předpokládu $\alpha_0 = 0$:

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | H) = p(\alpha_1 | H) p(\alpha_2 | \alpha_1, H) \dots p(\alpha_T | \alpha_{T-1}, H),$$

kde pro $t = 1, \dots, T - 1$

$$p(\alpha_{t+1} | \alpha_t, H) = f_N(\alpha_{t+1} | T_t \alpha_t, H)$$

a

$$p(\alpha_1) = f_N(\alpha_1 | 0, H).$$

- H má podobnou roli jako η v local level modelu (matice $p \times p \Rightarrow$ nevhodné použít empirických bayesovských metod.)

Posteriorní hustota pro β a h

- Z předchozích kapitol:

$$\beta | y, h, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim N(\bar{\beta}, \bar{V})$$

$$h | y, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim G(\bar{s}^{-2}, \bar{\nu}),$$

kde

$$\bar{V} = \left(\underline{V}^{-1} + h \sum_{t=1}^T X_t' X_t \right)^{-1},$$

$$\bar{\beta} = \bar{V} \left(\underline{V}^{-1} \underline{\beta} + h \sum_{t=1}^T X_t' (y_t - Z_t \alpha_t) \right),$$

$$\bar{\nu} = T + \underline{\nu},$$

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - X_t \beta - Z_t \alpha_t)^2 + \underline{\nu} s^2}{\bar{\nu}}.$$

Posteriorní hustota pro H

- Z analýzy SUR modelu:

$$H|y, \alpha_1, \dots, \alpha_T \sim W(\bar{\nu}_H, \bar{H}),$$

kde

$$\bar{\nu}_H = T + \underline{\nu}_H,$$

$$\bar{H} = \left[\underline{H}^{-1} + \sum_{t=0}^{T-1} (\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)(\alpha_{t+1} - T_t \alpha_t)' \right]^{-1}.$$

- Pro úplnost Gibbsova vzorkovače: $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H)$ a způsob generování výběrů.
- Lze jako vícerozměrné normální rozdělení \times T -rozměrné rozdělení a vysoce korelované prvky.
- Efektivní způsob generování náhodných výběrů: Carter a Kohn (1994) a DeJong a Shephard (1995).

DeJong a Shephard – značení

- Podoba stavového modelu:

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + G_t\nu_t,$$

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + J_t\nu_t.$$

pro $t = 1, \dots, T$ resp. $t = 0, \dots, T$ a $\alpha_0 = 0$.

- Náhodná složka ν_t je i.i.d. $N(0, h^{-1}I_{p+1})$; ostatní stejné.
- Ekvivalence s původní formulací pro: $\nu_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \end{pmatrix}$.
- G_t řádkový vektor rozměru $(p+1)$: $G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
- J_t rozměru $p \times (p+1)$: $J_t = \begin{bmatrix} 0_p & A \end{bmatrix}$, kde A je matice $p \times p$ implicitně definována vztahem

$$H^{-1} = \frac{1}{h}AA'.$$

DeJong a Shephard – princip

- Simulační vyhlazovač.
- Podmíněné posteriorní hustoty $p(\alpha_1, \dots, \alpha_T | y, \beta, h, H) \rightarrow$ neznámé jen α_t a ν_t .
- Příspěvek DeJonga a Shepharda: návrh efektivního algoritmu pro výběry $\eta_t = F_t \nu_t$ pro různé volby F_t .
- Výběry z η_t lze transformovat do výběrů z α_t .
- Možné arbitrární F_t , obvyklá volba $F_t = J_t \Rightarrow$ výběry chyb stavové rovnice, které lze přímo transformovat do požadovaných výběrů z α_t .

Filtrace

- Nastavení $a_1 = 0$, $P_1 = J_0 J_0'$ a výpočet následujících veličin pro $t = 1, \dots, T$ (běh Kalmanova filtru):

$$e_t = y_t - X_t \beta - Z_t \alpha_t$$

$$D_t = Z_t P_t Z_t' + G_t G_t'$$

$$K_t = (T_t P_t Z_t' + J_t G_t') D_t^{-1}$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t e_t$$

$$P_{t+1} = T_t P_t (T_t - K_t Z_t)' + J_t (J_t - K_t G_t)'$$

- Uložení e_t , D_t a K_t .

Smoothing

- Výpočet nové sady veličin v obrácené časové posloupnosti (tj. $t = T, T - 1, \dots, 1$).
- Nastavení $r_T = 0$ a $U_T = 0$ a výpočet

$$C_t = F_t(I - G_t'D_t^{-1}G_t - [J_t - K_tG_t]'U_t[J_t - K_tG_t])F_t'$$

$$\xi_t \sim N(0, h^{-1}C_t)$$

$$V_t = F_t(G_t'D_t^{-1}Z_t + [J_t - K_tG_t]'U_t[T_t - K_tZ_t])$$

$$r_{t-1} = Z_t'D_t^{-1}e_t + (T_t - K_tZ_t)'r_t - V_t'C_t^{-1}\xi_t$$

$$U_{t-1} = Z_t'D_t^{-1}Z_t + (T_t - K_tZ_t)'U_t(T_t - K_tZ_t) + V_t'C_t^{-1}V_t$$

$$\eta_t = F_t(G_t'D_t^{-1}e_t + [J_t - K_tG_t]'r_t) + \xi_t$$

kde $G_0 = 0$.

Výsledek

- Získáme $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_T)'$ a lze dokázat, že se jedná o náhodný výběr z $p(\eta|y, \beta, h, H)$.
- Podle podoby F_t lze tento výběr transformovat na náhodný výběr α_t pro $t = 1, \dots, T$.
- Při $F_t = J_t \rightarrow$ výběry náhodných chyb ve stavové rovnici (tj. $\eta_t = J_t \nu_t$) \rightarrow transformace na výběry z α_t za využití stavové rovnice a skutečnosti $\alpha_0 = 0$.
- Jednoduché počítačové zpracování (matice nízkých rozměrů a náhodný výběr z normálního rozdělení pro získání ξ_t).
- Umíme sekvenční výběry z podmíněných hustot \rightarrow standardní posteriorní analýza.

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - **Empirická ilustrace**
- 3 Rozšíření

Příklad

- BUDE ČASEM DOPLNĚNO!

Obsah tématu

- 1 Local level model
 - Věrohodnostní funkce a apriorní hustota
 - Posteriorní hustota
 - Empirické bayesovské metody
 - Empirická ilustrace
- 2 Obecný stavový model
 - Bayesovský výpočet
 - Empirická ilustrace
- 3 Rozšíření

Úvod

- BUDE ČASEM DOPLNĚNO!