Makroekonomické modelování – cvičení 3

1 Teorie I

Uvažujte domácnost, která žije čtyři období a její užitková funkce je

$$\ln(c_1) + \ln(c_2) + \ln(c_3) + \ln(c_4)$$

Její důchod v těchto čtyřech obdobích je $y_1 = 10$, $y_2 = 40$, $y_3 = 20$ a $y_4 = 10$. Předpokládejme, že úroková míra je dána exogenně a je konstatní a rovna 0.

(a) Napište mezičasové rozpočtové omezení.

(b) Vypočítejte optimální spotřebu (c_1, c_2, c_3 a c_4).[1]

(c) Předpokládejte, že domácnost si nemůže půjčovat a ani nemůže spořit. Jaká bude optimální spotřeba nyní?

(d) Opět zavedeme možnost půjčování. Rozdělíme členy téže dynastie (rodinného klanu) na dva druhy – rodiče a děti. Každý žije dvě období. Děti mají užitkovou funkci

$$\ln(c_3) + \ln(c_4)$$

a rodiče mají užitkovou funkci

$$\ln(c_1) + \ln(c_2) + v(b)$$

kde b je děditctví (bequest) zanechané dětem a $v(b)$ je maximální užitek dětí, které mohou získat při daném dědictví b. Důchod rodičů je $(y_1, y_2) = (10; 40)$ a důchod dětí je $(y_3, y_4) = (20; 10)$

Vyřeště maximalizační problém dětí, abyste získaly $v(b)$, tj vyřešte

$$v(b) = \max \{\ln(c_3) + \ln(c_4)\}$$

vzhledem k

$$c_3 + c_4 = y_3 + y_4 + b.$$

(e) Použijte svou odpověď z předchozí otázky k vyřešení maximalizačního problému rodičů. (Dědictví může být i záporné).

(f) Nyní uvažujte, že vláda vybere daně v období 2 ve výši 30 a rozdělí je paušálně v období 3. Jaká je optimální výše dědictví a výše spotřeby nyní?

[1] Trocha přemýšlení ušetří mechanické počítání.

Teorie II

Předpokládejte, že sociální plánovač maximalizuje

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t = k_t^{\alpha} + k_t - k_{t+1}, \qquad t = 0, 1, 2 \ldots$$

kde $k_0 = \bar{k}_0$ je dáno a $k_t \geq 0$ pro $t = 0, 1, 2 \ldots$. Pro parametry platí: $\alpha \in (0, 1)$ a $\beta \in (0, 1)$.

(a) Odvoďte podmínky první řádu pro optimum spotřebitele (Eulerovu rovnici).

(b) Co určuje, zda spotřeba bude v čase růst nebo klesat? (Využijte pro názornost vztah $\beta = \frac{1}{1+\rho}$)

(c) Jak je určena steady-statová hodnota kapitálu k^* a spotřeby c^*? Jaká je míra úspor ve steady-statu?

(d) Předpokládejte že $\alpha = 0.3$ a $\beta = .96$. Jaká je steady-statová úroveň k^* a c^*? Jak se bude steady-statová úroveň lišit, pokud bude sociální plánovač trpělivější, tedy $\beta = .98$?

2 Počítání

(viz předpřipravený m-file `seminar3.m` a soubor `priloha_cv3.pdf` s obrázky)

Ekonomika se sociálním plánovačem, který vybírá nekonečnou sekvenci dvou proměnných: spotřeby a kapitálové zásoby $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ aby maximalizoval

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta) k_t$$
$$c_t, k_t \geq 0 \qquad k_0 > 0 \qquad \text{dáno}$$

Předpokládejte následující formu užitkové funkce

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \qquad \theta > 0$$
$$y_t = \gamma k_t^{\alpha} \qquad , \alpha \in (0, 1)$$

kde $\alpha = .35$, $\beta = .98$, $\delta = .025$, $\theta = 2$ a $\gamma = 5$.
Jak jsme měli na přednášce, můžeme tento optimalizační úkol přepsat rekurzivně jako problém dynamického programování. Bellmanova rovnice bude mít tvar

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{u(k_t, k_{t+1}) + \beta \; v(k_{t+1})\}$$

Abychom vypočítali hodnotovou funkci použijeme metodu iterace hodnotové funkce. Kapitálová zásoba může nabývat tří diskrétního hodnot $k \in \{k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}\}'$ $= \{2.85, 3.00, 3.15\}'$. To znamená, že $v(k_t)$ a $v(k_{t+1})$ jsou vektory rozměru (3×1) a $u(k_t, k_{t+1})$ je matice 3×3 (viz obrázek v příloze).

(a) Sestavte matici spotřeby $c(i,j)$ o rozměrech (3×3) s hodnotami spotřeby pro všechny k_t a k_{t+1}. Poté vypočítejte matici užitku ze spotřeby $u(k_t, k_{t+1})$ opět o rozměrech (3×3) pro všechny hodnoty k_t a k_{t+1} (viz obrázek Figure 2 v příloze).

(b) Předpokládejte

$$v(k_{t+1}) = \begin{bmatrix} 167.6 \\ 168.1 \\ 168.6 \end{bmatrix}$$

Před maximalizací $\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta E\ v(k_{t+1})\}$ potřebujete vypočítat součet $u(k_t, k_{t+1})$ a $\beta v(k_{t+1})$. Ale jelikož $u(k_t, k_{t+1})$ má rozměry (3×3) a $v(k_{t+1})$ je vektor (3×1), musíme transformovat vektor $v(k_{t+1})$ do matice (3×3). Výsledná matice je znázorněna na obrázku Figure 3 v příloze. (Pozor, nutnost transpozice vektoru).

(c) Nyní máte $\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta E\ v(k_{t+1})\}$ a můžete vypočítat $v(k_t)$ pomocí maximalizace výrazu

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{u(k_t, k_{t+1}) + \beta\ v(k_{t+1})\}$$

Hint: nechte si zobrazit nápovědu k funkci `max` pomocí příkazu `help max`. Zajímá nás hledání maxima v řádcích (`DIM = 2`).

(d) Najděte rozhodovací pravidlo pro kapitál. Zjistěte, který prvek vektoru k_{t+1} dává optimální hodnotu. Tomuto prvku (pořadí vektoru) přiřadte hodnotu kapitálu. Najděte rozhodovací pravidlo pro spotřebu (jako funkci kapitálu k_t).

(e) Proveďte krok (c) v cyklu (podobně jako v cvičení 2 – hledání hodnoty firmy).

3 Data

Termpaper č. 1. Viz speciální zadání.