MAMO
podzim 2015
Přednáška 2
Lit: W-MT, ch1
K-QM, ch 3

1 Jednoduchý makroekonomický model

- Reprezentativní firma, reprezentativní domácnost
- optimalizace (maximalizace cílové funkce vzhledem k rozpočtovému omezení)
- mikro přístup k makroekonomii
- konkurenční rovnováha (competitive equilibrium), Paretovo optimum
- nejprve statický model

1.1 Struktura modelu

- N identických domácností
- 2 druhy statků: spotřeba (c), volný čas ($0 \leq \ell \leq 1$)
- užitková funkce $u(c, \ell)$
- Inadovy podmínky:
  - $\lim_{c \to 0} u_1(c, \ell) = \infty$, $\lim_{c \to \infty} u_1(c, \ell) = 0$
  - $\lim_{\ell \to 0} u_2(c, \ell) = \infty$, $\lim_{\ell \to \infty} u_2(c, \ell) = 0$

- M identických firem
- 2 výrobní faktory: práce (n), kapitál (k)
- agregátní zásoba kapitálu K je dána exogenně
- z je exogenní šok v produktivitě
- produkční funkce $y = zf(k, n)$, homogenní stupně 1, Inadovy podmínky podobně
- tři trhy: výstupu/spotřeby, práce, kapitálu
- dvě relativní ceny: reálná mzda (w), reálná nájemní cena kapitálu (r), spotřební statek je *numeraire* s cenou 1
- všichni agenti jsou příjemci cen

1.2 Domácnosti

Maximalizují užitkovou funkci

$$U = u(c, \ell)$$

vybírají c a ℓ vzhledem k rozpočtovému omezení

$$c = w(1 - \ell) + r(K/N) \tag{1}$$

a $0 \leq \ell \leq 1$, $c \geq 0$ a kde $(1 - \ell)$ je nabídka práce. Každá domácnost vlastní stejný podíl K.

Lze řešit pomocí Lagrangiánu nebo dosazením rozpočtového omezení do užitkové funkce (neomezená optimalizace)

Dosazení:

$$u(w(1-\ell)+r(K/N),\ell)$$

a derivací $\partial u(\ldots)/\partial \ell = 0$.

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = u(c,\ell) + \lambda[w - w\ell + r(K/N) - c]$$

a derivace $\partial\mathcal{L}/\partial c = 0$, $\partial\mathcal{L}/\partial \ell = 0$ a $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$.

Řešením je podmínka optimality prvního řádu: mezní míra substituce (mezi volným časem a spotřebou) = reálná mzda

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = w \tag{2}$$

(1) a (2) lze vyřešit pro c a ℓ jako funkce w, r a K/N. (Vlastnosti užitkové funkce zajišťují, že existuje pouze jedno jedinné řešení.)

1.3 Firmy

vybírají vstupy – práci a kapitál, aby maximalizovaly zisk (w a r berou jako dané)

$$\max_{k,n}[zf(k,n) - rk - wn]$$

Podmínky prvního řádu

$$zf_1(k,n) = r \tag{3}$$

$$zf_2(k,n) = w \tag{4}$$

Produkční funkce

$$y = zf(k,n)$$

má konstatní výnosy z rozsahu (homogenní stupně 1, platí Eulerův teorém).

$$\lambda y = zf(\lambda k, \lambda n) \tag{5}$$

$$zf(k,n) = zf_1(k,n)k + zf_2(k,n)n \tag{6}$$

rovnice (3), (4) a (6) implikují, že maximální zisk je = 0. Z toho vyplývají dvě věci:

- Nemusíme se starat, jak je zisk firem distribuován (např. dividendy, podíly na zisku)
- Předpokládejme, že k^* a n^* jsou optimální množství výrobních faktorů. Pak musí platit

  $$zf(k,n) - rk - wn = 0 \tag{7}$$

  pro $k = k^*$ a $n = n^*$. Ale (7) platí i pro $k = \lambda k^*$ a $n = \lambda n^*$, kde $\lambda > 0$ díky CRS.

Tím pádem není určena optimální velikost firmy, můžeme mít $M = 1$ – jedna reprezentativní firma. (Počet firem je irelevantní pro definici konkurenční rovováhy)

1.4 Konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)

Soubor množství c, ℓ, n, k a cen w, r, které splňují tyto podmínky

1. Každá domácnost vybírá c a ℓ optimálně při daných cenách w a r (rovnice 1 a 2)
2. Reprezentativní firma vybírá n a k optimálně při daných cenách w a r (rovnice 3, 4 a 5)
3. Trhy se čistí (chování domácností a firem je vzájemně konzistentní)
   - trh práce
   $$N(1-\ell) = (M)n \tag{8}$$
   - trh kapitálu
   $$K = (M)k \tag{9}$$
   - trh zboží
   $$(M)y = Nc \tag{10}$$

Nabídka = poptávka. Přebytky poptávky na jednotlivých trzích jsou

$$Nc - y + w[n - N(1-\ell)] + r[k-K].$$

Z (upraveného) rozpočtového omezení domácností (1) a podmínky nulového zisku (7) vyplývá, že přebytky na všech trzích jsou v součtu nulové.

$$Nc = w(1-\ell)N + rK \qquad \text{a} \qquad y - rk - wn = 0$$

$$Nc - y + w[n - N(1-\ell)] + r[k-K] = 0 \tag{11}$$

Pokud dvě ze tří podmínek (8, 9 a 10) platí, tak podle (11) platí i třetí podmínka.

Walrasův zákon: Pokud je Q trhů a $Q-1$ je jich v rovnováze, pak i poslední trh je v rovnováze.

Využijeme Walrasův zákon. Máme 8 rovnic a 7 proměnných (neznámých) w, r, n, k, c, ℓ a y. Můžeme 1 rovnici eliminovat, např. (9).

Problém si můžeme dále zjednodušit. Počet spotřebitelů je pro řešení irelevantní. Můžeme nastavit $N = 1$ a analyzovat ekonomiku s jedním reprezentativním spotřebitelem – domácností. Konkurenční rovnováha (CE) má stejné vlastnosti jako když máme mnoho firem a spotřebitelů.

Řešíme jako systém rovnic, využijeme $n = (1-\ell)$

$$\frac{u_2(c,\ell)}{u_1(c,\ell)} = zf_2(k, 1-\ell) = w \tag{12}$$

$$c = zf(k, 1-\ell) \tag{13}$$

$$r = zf_1(k, 1-\ell), \qquad w = zf_2(k, 1-\ell) \tag{14}$$

dosazením za c dostaneme

$$\frac{u_2(zf(k,1-\ell),\ell)}{u_1(zf(k,1-\ell),\ell)} = zf_2(k, 1-\ell) \tag{15}$$

a vyřešíme pro ℓ ($k = k_0$ je dáno). Potom zpětně dosadíme do výše uvedených rovnic a získáme řešení pro r, w, n a c. Máme model, který umíme vyřešit a který můžeme studovat: co se stane, když se změní některá z veličin.

Zajímá nás např. změna výstupu (na hlavu) $y = zf(k, 1-\ell)$, který je určen:

- kapitálovou zásobou (k)
- produktivitou (z)
- preferencemi pro volný čas ($1 - \ell$)

Změna výstupu pak bude mít vliv i na ostatní veličiny. Příklad z Williamsona (růst produktivity).

1.5 Paretovo optimum

je taková alokace,[1] při které neexistuje jiná alokace, kterou by nějaký agent striktně preferoval a jakýkoliv jiný agent by si nepohoršil.

My máme jen jednoho agenta. Můžeme uvažovat o tzv. sociálním plánovači, který

- určuje vstupy na výrobu reprezentativní firmě
- nutí spotřebitele nabízet náležité množství práce
- distribuuje statky spotřebitelům – tak aby na tom byl spotřebitel co možná nejlépe

Sociální plánovač určí Paretovo optimum řešením následujícího problému

$$\max_{c,\ell} u(c, \ell) \qquad \text{vzhledem k} \qquad c = zf(k, 1 - \ell)$$

Můžeme řešit dosazením, výsledkem je

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = zf_2(k, 1 - \ell) \tag{16}$$

což je stejná rovnice jako v případě CE (competitive equilibrium – konkurenční rovnováha). Interpretace: mezní míra substituce = mezní míra transformace. CE je stejné jako Paretovo optimum (řešení sociálního plánovače).[2]

1.6 Teorémy blahobytu (Welfare theorems)

Za určitých podmínek (definováno níže)

1. Konkurenční rovnováha je Pareto optimální (*První teorém blahobytu*)
2. Jakéhokoliv Paretova optima může být dosaženo vhodným přerozdělením počátečního vybavení (zdrojů), (*Druhý teorém blahobytu*)

Podmínky: absence externalit, veřejných statků, rostoucích výnosů z rozsahu, asymterických informací, distorzních daní, nutnost kompletních trhů.

Implikace:

- V makroekonomii, pokud vysvětlíme určitý jev (např. hospodářské cykly) pomocí modelu konkurenční rovnováhy, kde platí 1. WT $\Rightarrow$ není prostor pro vládní intervence
- Rovnost CE a PO je dobrá z hlediska výpočetního. Je jednodušší získat řešení (CE), když vyřešíme problém SP a dostaneme rovnovážná množství a pak vyřešíme pro ceny (než řešení všeho zároveň)

[1] Plán produkce a distribuce statků mezi ekonomické agenty.

[2] Když $u(.;.)$ je striktně konkávní a $f(.;.)$ striktně kvazikonkávní, existuje jediné Pareto optimum a CE je také jediné.

2 Dynamická ekonomie

- Domácnosti se rozhodují, kolik spotřebují dnes a kolik ušetří.
- Žijí T období
- užitková funkce je časově separabilní (2 krát diff, striktně rostoucí a striktně konkávní)

$$U[(c_0, \ell_0), (c_1, \ell_1), (c_2, \ell_2) \dots (c_T, \ell_T)] = u(c_0, \ell_0) + \beta u(c_1, \ell_1) + \beta^2 u(c_2, \ell_2) + \dots \beta^T u(c_T, \ell_T)$$

$\beta \in (0, 1)$ je *diskontní faktor*, vyjadřující netrpělivost domácností ve spotřebě

Někdy se používá *diskontní míra* $\rho > 0$ přičemž platí

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

Domácnosti jsou vybaveny aktivy (bondy – obligace), $a_0 \geq 0$.

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

Na začátku má domácnost aktiva a_0. A co na konci? Pokud může zemřít zadlužená, udělá to. Proto ji omezíme, aby $a_{T+1} \geq 0$. Ale domácnost nemá důvod něco nechávat dědicům, když ví, kdy umře, proto $a_{T+1} = 0$ (koncová podmínka). [3] No-Ponzi game condition.

Maximalizační problém

$$\max_{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t, \ell_t)$$

vzhledem k

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

a $c_t \geq 0$ a $a_{T+1} \geq 0$. Odvodíme nutné podmínky optimality (jsou i postačující). Řešíme pomocí Lagrangiánu.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t, \ell_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t [w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t - c_t - a_{t+1}]$$

Podmínky prvního řádu (first order conditions, FOC) vzhledem k c_t, c_{t+1} a a_{t+1} položíme rovny 0. Dosazením dostaneme

$$u_c(c_t, \ell_t) = u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})\beta(1 + r_{t+1})$$

„Náklady“ z úspory jednotky spotřeby dnes = přínos vyšší spotřeby zítra.

Eulerova rovnice (mezní míra substituce = tržní úroková míra)

$$\frac{u_c(c_t, \ell_t)}{\beta u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

Stav, kdy spotřeba a úroková míra jsou v čase konstatní: steady-state, $c_t = c_{t+1} = c$, $r_t = r_{t+1} = r$.

$$\frac{1}{1+\rho} = \beta = \frac{1}{1+r}$$

V steady-statu je $\rho = r$.

Řešení: Pro jednoduchost přijmeme předpoklad $l_t = 0$, tj. domácnost pouze pracuje. Rozpočtové omezení rozepíšeme pro $t + 1$ a dosadíme do Eulerovy rovnice.

$$c_t = w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}$$

[3] Pro $T = \infty$ je to složitější, později.

$$c_{t+1} = w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}$$

Eulerova rovnice

$$u_c[w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}] = \beta(1 + r_{t+1})u_c[w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}] \tag{17}$$

Ceny jsou dané $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{T}$. Jediné proměnné, které potřebujeme určit jsou a_t, a_{t+1}, a_{t+2}. Rovnice (17) je diferenční rovnice druhého řádu (obecně nelineární).

Máme celkem $T + 2$ rovnic: počáteční podmínku a_0 a koncovou podmínku $a_{T+1} = 0$ a T Eulerovek. Počet proměnných je také $T + 2$: $\{a_t\}_{t=0}^{T+1}$. Počet neznámých = počet rovnic. Bude to mít řešení a bude jediné, díky vlastnostem užitkové a produkční funkce.

Vybereme konkrétní tvar užitkové funkce, použijeme nějakou matematickou aproximaci (linearizace – naučíme se později) a systém rovnic můžeme vyřešit (nejlépe pomocí nějakého softwaru).