

DXX\_MAT2, Domácí úloha č.1

Termín odevzdání:

Bodová hodnota: 5b z 35b

Varianta: A

1.

$$f(x, y, z) = x^4y^2 - x^3z^3 + x^2y^2z^2$$

- Ukažte, že je funkce  $f(x, y, z)$  homogenní a určete stupeň homogenity.
- Vypočítejte všechny 1. parciální deriváce funkce  $f(x, y, z)$  a určete stupeň homogenity těchto funkcí.
- Ukažte, že pro funkci  $f(x, y, z)$  platí Eulerův vzorec.

2.

$$h(x, y) = x^6y + x^{14}y^{7/3} + 3$$

- Pro funkci  $h(x, y)$  ukážete, že je monotónní transformací homogenní funkce, tedy že jde o funkci homotetickou.
- Když platí  $h(x_1, y_1) \geq h(x_2, y_2)$ , co platí pro  $h(2x_1, 2y_1)$  a  $h(2x_2, 2y_2)$ ?

3. S využitím Hessovy matice zjistěte, zda je funkce  $f(x, y) = -x^2 + y^2 - xy$  konvexní nebo konkávní.

4.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^-$$

Je funkce  $f(x)$  konvexní nebo konkávní? Mějme  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-, \lambda \in (0, 1)$ , která z následujících nerovností platí?

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Varianta: B

1.

$$f(x, y, z) = 2x^3y^{-2} - 7x^2y^2z^{-3} + 3x^2y^{-2}z$$

- Ukažte, že je funkce  $f(x, y, z)$  homogenní a určete stupeň homogenity.
- Vypočítejte všechny 1. parciální deriváce funkce  $f(x, y, z)$  a určete stupeň homogenity těchto funkcí.
- Ukažte, že pro funkci  $f(x, y, z)$  platí Eulerův vzorec.

2.

$$h(x, y) = x^9 y^{3/2} + x^3 y^{1/3} + 6$$

- a) Pro funkci  $h(x, y)$  ukážete, že je monotónní transformací homogenní funkce, tedy že jde o funkci homotetickou.
- b) Když platí  $h(x_1, y_1) \geq h(x_2, y_2)$ , co platí pro  $h(2x_1, 2y_1)$  a  $h(2x_2, 2y_2)$ ?

3. S využitím Hessovy matice zjistěte, zda je funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^6$  konvexní nebo konkávní.

4.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^+$$

Je funkce  $f(x)$  konvexní nebo konkávní? Mějme  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, \lambda \in (0, 1)$ , která z následujících nerovností platí?

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Varianta: C

1.

$$f(x, y, z) = \frac{3x^2 z}{y^2} - \frac{7x^2 y^2}{z^3} + \frac{2x^3}{y^2}$$

- a) Ukažte, že je funkce  $f(x, y, z)$  homogenní a určete stupeň homogenity.
- b) Vypočítejte všechny 1. parciální derivace funkce  $f(x, y, z)$  a určete stupeň homogenity těchto funkcí.
- c) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y, z)$  platí Eulerův vzorec.

2.

$$h(x, y) = xy^6 + x^5 y^{30} + 7$$

- a) Pro funkci  $h(x, y)$  ukážete, že je monotónní transformací homogenní funkce, tedy že jde o funkci homotetickou.
- b) Když platí  $h(x_1, y_1) \geq h(x_2, y_2)$ , co platí pro  $h(2x_1, 2y_1)$  a  $h(2x_2, 2y_2)$ ?

3. S využitím Hessovy matice zjistěte, zda je funkce  $f(x, y) = 2(x^2 + y^2) - xy$  konvexní nebo konkávní.

4.

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^-$$

Je funkce  $f(x)$  konvexní nebo konkávní? Mějme  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , která z následujících nerovností platí?

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Varianta: D

1.

$$f(x, y, z) = 2x^4y^{-1} - 7x^2y^2z^{-1} + 3x^2y^{-2}z^3$$

- Ukažte, že je funkce  $f(x, y, z)$  homogenní a určete stupeň homogenity.
- Vypočítejte všechny 1. parciální derivace funkce  $f(x, y, z)$  a určete stupeň homogenity těchto funkcí.
- Ukažte, že pro funkci  $f(x, y, z)$  platí Eulerův vzorec.

2.

$$h(x, y) = 4x^2y + 2x^6y^3 + 7x^{10}y^5 + 15$$

- Pro funkci  $h(x, y)$  ukažte, že je monotónní transformací homogenní funkce, tedy že jde o funkci homotetickou.
- Když platí  $h(x_1, y_1) \geq h(x_2, y_2)$ , co platí pro  $h(2x_1, 2y_1)$  a  $h(2x_2, 2y_2)$ ?

3. S využitím Hessovy matice zjistěte, zda je funkce  $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy$  konvexní nebo konkávní.

4.

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^+$$

Je funkce  $f(x)$  konvexní nebo konkávní? Mějme  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , která z následujících nerovností platí?

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Varianta: E

1.

$$f(x, y, z) = x^{-1}y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{6}}$$

- Ukažte, že funkce  $f(x, y, z)$  je homogenní a určete stupeň homogenity.
- Vypočítejte všechny 1. parciální derivace funkce  $f(x, y, z)$  a určete stupeň homogenity těchto funkcí.

c) Ukažte, že pro funkci  $f(x, y, z)$  platí Eulerův vzorec.

2.

$$h(x, y) = x^6 y + x^{10} y^{5/3} + 3$$

a) Pro funkci  $h(x, y)$  ukážete, že je monotónní transformací homogenní funkce, tedy že jde o funkci homotetickou.

b) Když platí  $h(x_1, y_1) \geq h(x_2, y_2)$ , co platí pro  $h(2x_1, 2y_1)$  a  $h(2x_2, 2y_2)$ ?

3. S využitím Hessovy matice zjistěte, zda je funkce  $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6xy + x$  konvexní nebo konkávní.

4.

$$f(x) = e^x$$

Je funkce  $f(x)$  konvexní nebo konkávní? Mějme  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, 1)$ , která z následujících nerovností platí?

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$