DXX_MAT2, Domácí úloha č.6
Termín odevzdání: 27.11.2015
Bodová hodnota: 7b z 35b

Varianta: A

1. Mějme funkci $f(x, y, q) = -(-qxy + y - x^2)$, kde q je parameter.
   a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům funkce $f(x, y, q)$ pro danú hodnotu parametru q, vypočítejte
   $$\frac{\partial f(x^*(q), y^*(q), q)}{\partial q}$$
   b) Najděte stacionární body funkce $f(x, y, q)$ v závislosti na parametru q. Vypočítejte funkční hodnoty v stacionárních bodech a zjistěte derivaci těchto funkčních hodnot dle q.
   c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?
2. Mějme optimalizační problém $\max_{x,y} xy$ za podmínek $x + y \leq q$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
   a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům úlohy a $L(x, y, \lambda, q)$ je Lagrangeova funkce, vypočítejte
   $$\frac{\partial L(x^*(q), y^*(q), \lambda, q)}{\partial q}$$
   b) Najděte obecné řešení úlohy pro $q > 0$, vypočítejte funkční hodnoty v závislosti na q a určete jejich deriváci podla q.
   c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?
3. Mějme tři prosté loterie $L_1 = (1/3, 1/2, 1/6), L_2 = (1/2, 1/4, 1/4), L_3 = (5/8, 1/4, 1/8)$, v kterých můžou nastat tři různé stavy s_1, s_2, s_3 s danou pravděpodobností. Každému stavu odpovídá výplata $v(s_1) = 120, v(s_2) = 80, v(s_3) = 100$. Loterie L_1, L_2, L_3 jsou volené náhodně v rámci složené loterie $\Lambda = (1/6, 2/3, 1/6)$.
   a) Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých stavů $p(s_1), p(s_2), p(s_3)$ v složené loterii Λ? Jaké jsou očekávané výplaty loterií L_1, L_2, L_3, Λ? (ozn. $E(v(L_1)), \ldots, E(v(\Lambda))$)
   b) Mějme danou užitkovou funkci $u(x) = x^2$. Je funkce konvexní nebo konkávní? Určete hodnoty očekávaných užitků loterií L_1, L_2, L_3, Λ (ozn. $E(u(L_1), \ldots, E(u(\Lambda)))$ a porovnejte je s užitky z očekávaných výplat těchto loterií. Je spotřebitel rizikově averzní, neutrální, alebo vyhledáva riziko? Kterou loteri z L_1, L_2, L_3, Λ by si spotřebitel vybral?

Varianta: B

1. Mějme funkci $f(x, y, q) = x^2 - xy + \frac{y^2}{2} - qx$, kde q je parameter.
   a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům funkce $f(x, y, q)$ pro danú hodnotu parametru q, vypočítejte
   $$\frac{\partial f(x^*(q), y^*(q), q)}{\partial q}$$

b) Najděte stacionární body funkce $f(x, y, q)$ v závislosti na parametru q. Vypočítejte funkční hodnoty v stacionárních bodech a zjistěte derivaci těchto funkčních hodnot dle q.

c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?

2. Mějme optimalizační problém $\max_{x,y} qx + \frac{y^2}{2}$ za podmínek $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům úlohy a $L(x, y, \lambda, q)$ je Lagrangeova funkce, vypočítejte

$$\frac{\partial L(x^*(q), y^*(q), \lambda, q)}{\partial q}$$

b) Najděte obecné řešení úlohy pro $q > 0$, vypočítejte funkční hodnoty v závislosti na q a určete jejich deriváci podla q.

c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?

3. Mějme tři prosté loterie $L_1 = (4/5, 1/5, 0), L_2 = (2/5, 2/5, 1/5)$, $L_3 = (1/6, 1/3, 1/2)$, v kterých můžou nastat tři různé stavy s_1, s_2, s_3 s danou pravděpodobností. Každému stavu odpovídá výplata $v(s_1) = 100, v(s_2) = 150, v(s_3) = 40$. Loterie L_1, L_2, L_3 jsou volené náhodně v rámci složené loterie $\Lambda = (3/8, 1/2, 1/8)$.

a) Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých stavů $p(s_1), p(s_2), p(s_3)$ v složené loterii Λ? Jaké jsou očekávané výplaty loterií L_1, L_2, L_3, Λ? (ozn. $E(v(L_1)), \ldots, E(v(\Lambda)))$

b) Mějme danou úžitkovou funkci $u(x) = \sqrt{x}$. Je funkce konvexní nebo konkávní? Určete hodnoty očekávaných užitků loterií L_1, L_2, L_3, Λ (ozn. $E(u(L_1), \ldots, E(u(\Lambda)))$ a porovnejte je s užitky z očekávaných výplat těchto loterií. Je spotřebitel rizikově averzní, neutrální, alebo vyhledáva riziko? Kterou loteri z L_1, L_2, L_3, Λ by si spotřebitel vybral?

Varianta: C

1. Mějme funkci $f(x, y, q) = x^2 + y^2 - qxy$, kde q je parameter.

a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům funkce $f(x, y, q)$ pro danú hodnotu parametru q, vypočítejte

$$\frac{\partial f(x^*(q), y^*(q), q)}{\partial q}$$

b) Najděte stacionární body funkce $f(x, y, q)$ v závislosti na parametru q. Vypočítejte funkční hodnoty v stacionárních bodech a zjistěte derivaci těchto funkčních hodnot dle q.

c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?

2. Mějme optimalizační problém $\max_{x,y} \frac{qx^2}{2} + y$ za podmínek $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

a) Pokud $x^*(q)$ a $y^*(q)$ odpovídají stacionárním bodům úlohy a $L(x, y, \lambda, q)$ je Lagrangeova funkce, vypočítejte

$$\frac{\partial L(x^*(q), y^*(q), \lambda, q)}{\partial q}$$

b) Najděte obecné řešení úlohy pro $q > 0$, vypočítejte funkční hodnoty v závislosti na q a určete jejich deriváci podla q.

c) Pokud $q = 1$, o kolik se přibližně změní funkční hodnota v stacionárních bodech, když hodnota parametru q vzroste o 0.01?

3. Mějme tři prosté loterie $L_1 = (1/4, 1/4, 1/2), L_2 = (0, 1/2, 1/2)$, $L_3 = (2/3, 1/6, 1/6)$, v kterých můžou nastat tři různé stavy s_1, s_2, s_3 s danou pravděpodobností. Každému stavu odpovídá výplata $v(s_1) = 240, v(s_2) = 480, v(s_3) = 360$. Loterie L_1, L_2, L_3 jsou volené náhodně v rámci složené loterie $\Lambda = (1/3, 1/3, 1/3)$.

   a) Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých stavů $p(s_1), p(s_2), p(s_3)$ v složené loterii Λ? Jaké jsou očekávané výplaty loterií L_1, L_2, L_3, Λ? (ozn. $E(v(L_1)), \ldots, E(v(\Lambda)))$

   b) Mějme danou úžitkovou funkci $u(x) = 2x$. Je funkce konvexní nebo konkávní? Určete hodnoty očekávaných užitků loterií L_1, L_2, L_3, Λ (ozn. $E(u(L_1), \ldots, E(u(\Lambda)))$ a porovnejte je s užitky z očekávaných výplat těchto loterií. Je spotřebitel rizikově averzní, neutrální, alebo vyhledáva riziko? Kterou loteri z L_1, L_2, L_3, Λ by si spotřebitel vybral?