Makroekonomické modelování – cvičení 4

1 Teorie I

Uvažujte následující problém sociálního plánovače.

$$\max_{\{c_t,\ell_t,i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \ell_t) \right]$$

vzhledem k

$$c_t + i_t = y_t$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$
$$h_t + \ell_t = 1$$
$$c_t, k_t, h_t, \ell_t \geq 0$$

a $k_0 > 0$ a je dáno, a $\delta \in (0,1)$
Konkrétní forma užitkové a produkční funkce je:

$$u(c_t, \ell_t) = \frac{(c_t^{\mu} \ell_t^{1-\mu})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$y_t = z_t f(k_t, h_t) = z_t k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}$$

kde $\sigma > 0$ a $\delta \in (0,1)$ a šok z_t je technologický šok, který je *iid* a může nabývat následujících hodnot

$$z_t \in Z = [.75, 1.25]$$

s pravděpodobnostmi

$$\pi_1 = Pr\{z_t = z^1\} = .5$$
$$\pi_2 = Pr\{z_t = z^2\} = .5$$

V (deterministickém) steady statu je hodnota šoku rovna jeho střední hodnotě. Vypočítejte steady-statové hodnoty následujících endogenních proměnných (poměry proměnných) jako funkce strukturálních parametrů, tj. parametrů technologií a preferencí („řecká písmena“).

(a) poměr investic a kapitálu (investment/capital ratio, i/k)[1]

(b) ceny výrobních faktorů ($mpk = R$, $mpl = w$)

(c) poměr kapitálu a práce (capital/labor ratio, k/h) [2]

(d) poměr kapitálu a výstupu (capital/output ratio, k/y) [3]

(e) podíl kapitálu a práce na národním důchodu (capital share a labor share)

(f) podíl investic a výstupu (investment/output ratio, i/y)

(g) podíl spotřeby a výstupu (constumption/output ratio, c/y)

[1]Využijte rovnici pro vývoj kapitálu.
[2]Využijte mezičasovou podmínku optimality, Eulerovu rovnici.
[3]Využijte opět Eulerovu rovnici.

Teorie II

CRRA funkce a výběr spotřeby mezi dvěma obdobími.
Mějme užitkovou funkci

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

kde $\theta > 0$. Pro $\theta = 1$ je $u(c) = \ln c$.

1. Ukažte, že $u'(c) > 0$ a $u''(c) < 0$.
2. Co se stane s $u'(c)$, když $c \to 0$ a když $c \to \infty$?
3. Předpokládejte, že spotřebitel žije jen dvě období (1 a 2). Jeho užitková funkce je

   $$U = u(c_1) + \frac{1}{1+\rho} u(c_2)$$

   kde u(c) je CRRA funkce a $\rho > 0$. Vysvětlete, co parametry ρ a θ (nebo $\sigma = 1/\theta$) znamenají pro spotřebitelovy preference mezi obdobími.
4. Předpokládejte, že spotřebitel pracuje pouze v prvním období, jinak nemá žádný příjem. Jeho rozpočtové omezení tedy je

   $$c_1 + \frac{1}{1+r} c_2 = w$$

   kde w je mzdový příjem. Odvoďte podmínku prvního řádu pro maximalizaci užitku (Eulerovu rovnici).
5. Najděte explicitní řešení pro spotřebu v období 1 a 2, tedy c_1 a c_2 jako funkce parametrů a cen r a w. Vysvětlete, jak spotřeba závisí na mzdovém příjmu w a úrokové míře r. Jaká je zde role parametrů ρ a θ (σ)?

2 Počítání I

(viz předpřipravený m-file `seminar3.m` a soubor `priloha_cv3.pdf` s obrázky)

Ekonomika se sociálním plánovačem, který vybírá nekonečnou sekvenci dvou proměnných: spotřeby a kapitálové zásoby $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ aby maximalizoval

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta) k_t$$

$$c_t, k_t \geq 0 \qquad k_0 > 0 \qquad \text{dáno}$$

Předpokládejte následující formu užitkové funkce

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \qquad \theta > 0$$

$$y_t = \gamma k_t^{\alpha} \qquad , \alpha \in (0, 1)$$

kde $\alpha = .35$, $\beta = .98$, $\delta = .025$, $\theta = 2$ a $\gamma = 5$.
Jak jsme měli na přednášce, můžeme tento optimalizační úkol přepsat rekurzivně jako problém dynamického programování. Bellmanova rovnice bude mít tvar

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}}\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta\ v(k_{t+1})\}$$

Abychom vypočítali hodnotovou funkci použijeme metodu iterace hodnotové funkce. Kapitálová zásoba může nabývat tří diskrétnícho hodnot $k \in \{k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}\}'$ $= \{2.85, 3.00, 3.15\}'$. To znamená, že $v(k_t)$ a $v(k_{t+1})$ jsou vektory rozměru (3×1) a $u(k_t, k_{t+1})$ je matice 3×3 (viz obrázek v příloze).

(a) Sestavte matici spotřeby $c(i, j)$ o rozměrech (3×3) s hodnotami spotřeby pro všechny k_t a k_{t+1}. Poté vypočítejte matici užitku ze spotřeby $u(k_t, k_{t+1})$ opět o rozměrech (3×3) pro všechny hodnoty k_t a k_{t+1} (viz obrázek Figure 2 v příloze).

(b) Předpokládejte

$$v(k_{t+1}) = \begin{bmatrix} 167.6 \\ 168.1 \\ 168.6 \end{bmatrix}$$

Před maximalizací $\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta E\ v(k_{t+1})\}$ potřebujete vypočítat součet $u(k_t, k_{t+1})$ a $\beta v(k_{t+1})$. Ale jelikož $u(k_t, k_{t+1})$ má rozměry (3×3) a $v(k_{t+1})$ je vektor (3×1), musíme transformovat vektor $v(k_{t+1})$ do matice (3×3). Výsledná matice je znázorněna na obrázku Figure 3 v příloze. (Pozor, nutnost transpozice vektoru).

(c) Nyní máte $\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta E\ v(k_{t+1})\}$ a můžete vypočítat $v(k_t)$ pomocí maximalizace výrazu

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}}\{u(k_t, k_{t+1}) + \beta\ v(k_{t+1})\}$$

Hint: nechte si zobrazit nápovědu k funkci `max` pomocí příkazu `help max`. Zajímá nás hledání maxima v řádcích (`DIM = 2`).

(d) Najděte rozhodovací pravidlo pro kapitál. Zjistěte, který prvek vektoru k_{t+1} dává optimální hodnotu. Tomuto prvku (pořadí vektoru) přiřadte hodnotu kapitálu. Najděte rozhodovací pravidlo pro spotřebu (jako funkci kapitálu k_t).

(e) Proveďte krok (c) v cyklu (podobně jako v cvičení 2 – hledání hodnoty firmy).

2 Počítání II

Uvažujte modelovou ekonomiku, kde sociální plánovač vybírá nekonečnou sekvenci spotřeby a kapitálové zásoby $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, aby maximalizoval

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t + k_{t+1} = y_t + (1 - \delta)k_t$$

$$c_t, k_t, \geq 0$$

a $k_0 > 0$ a je dáno, a $\delta \in (0,1)$.
Ekonomika je vystavena exogennímu stochastickému šoku γ, který je *iid* a může nabývat následujících hodnot

$$\gamma_t \in \Gamma = [4.95, 5.05]$$

s pravděpodobnostmi

$$\pi_1 = Pr\{\gamma_t = \gamma^1\} = .5$$
$$\pi_2 = Pr\{\gamma_t = \gamma^2\} = .5$$

Uvažujte následující užitkovou a produkční funkci:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$
$$y_t = \gamma_t F(k_t, 1) = \gamma_t k_t^\alpha$$

Vypočítejte hodnotovou funkci (value function) a rozhodovací pravidlo (decision rule) pomocí metody iterace hodnotové funkce (value function iteration).

1. Napište Bellmanovu rovnici pro problém sociálního plánovače. Tj. reformulujte problém jako problém dynamického programování. Určete, které proměnné jsou statové (endogenní/exogenní) a které řídící.

2. Odvoďte deterministický steady state pro hodnotu kapitálu, k^*, jako funkci strukturálních parametrů.

3. v Matlabu: m-file >> Definujte hodnoty parametrů. vypočítejte steady-state kapitálu. Uvažujte hodnoty: $\alpha = .35, \beta = .98, \delta = .025$, $\sigma = 2$ a $\gamma = 5$.

4. Diskretizujte stavovou proměnnou k, tj. vytvořte grid v okolí steady statu $k_1 = 0.95\bar{k}$, $k_{gk} = 1.05\bar{k}$, kde $gk = 101$ (počet bodů).

5. Vytvořte matici spotřeby (pro každý šok jeden plást $(gk \times gk)$, tedy $(gk \times gk \times gg)$, kde $gg = 2$, dva stavy technologického šoku). Matice spotřeby je pro každou kombinaci k a k'. Vytvořte užitkovou matici.

6. Definujte počáteční odhad hodnotové funkce v_0 $(gk \times gg)$. Vypočítejte novou hodnotovou funkci řešením Bellmanovy rovnice.

$$v_1(k, \gamma) = \max_{k'} \left\{ u + \beta\, \mathbf{1}\, \pi [v_0(k', \gamma')]^T \right\}$$

   Řešte iterativně, do té doby, až dostanete blízkou aproximaci skutečné hodnotové funkce. Vypočítejte a vykreslete rozhodvací pravidla pro k' a c. Tj. pro poslední maximalizaci najděte index řádku, který dává maximální hodnotu pro každé k' (pro obě hodnotové funkce). Z indexu vypočítejte rozhodovací pravidlo pro kapitál $k' = k(i)$. Rozhodovací pravidlo pro spotřebu vypočítejte residuálně.

7. Nasimulujte (100 krát) chování ekonomiky při reakci na stochastický šok γ_t.

Pro tento příklad se podívejte na řešení na webu. M-file `seminar4_det.m` je řešením výše uvedeného problému pro deterministický případ (bez stochastického šoku). M-file `seminar4_iid.m` odpovídá výše uvedenému zadání. M-file `seminar4_mc.m` je modifikace, pokud je šok modelován jako Markovský řetězec.