MAMO
podzim 2015
Přednáška 10
Lit: W-MT, ch 2
Romer-AM (2006), ch2
Krueger DFP, ch 5.3

# Model překrývajících se generací

Model překrývajících se generací (Overlapping Generation model, OLG). Tak trochu jiná třída modelů. Proč? Agenti nežijí nekonečně dlouho, ale mají životní cyklus.

V OLG modelech žijí zároveň mladí a staří agenti, staří umírají a noví se narodí atd. OLG modely mají jiné závěry než modely s nekonečným horizontem (konkurenční rovnováha nemusí být Pareto optimální, může existovat více rovnováh).

Podíváme se na úspory a akumulaci kapitálu, demografické změny a na penzijní systém.

# Model

Diskrétní čas, $t = 1, 2, 3 \ldots$. Na začátku každého období $t \geq 1$ se narodí nová generace (kohorta). Agenti žijí jen dvě období. Značení: mladí (young) index $y$ nebo 1, staří (old) index $o$ nebo 2). V čase t=1 je tam kohorta starých, kteří dožívají.

Populace roste konstantním tempem $L_t = L_{t-1}(1 + n)$.

## Preference

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

Splňuje klasické vlastnosti.

Mladí mají jednu jednotku práce, kterou nabízejí na trhu práce. Staří nepracují. (Počáteční kohorta starých je vybavena kapitálem, daným exogenně). Mladí obdrží mzdu a rozhodují se kolik spotřebují a kolik uspoří. Staří pouze spotřebovávají, žijí ze svých úspor (a úroků).

## Technologie

Firmy najímají práci $L_t$ a kapitál $K_t$ a vyrábějí produkt pomocí produkční funkce

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Splňuje klasické vlastnosti, včetně CRS, lze vyjádřit per capita $y_t = f(k_t)$. Předpokládáme, že kapitál nedepreciuje $\delta = 0$.

### Časový sled událostí

Obrázek.

## Řešení a rovnováha

První generace a všechny další

$$\max_{c_{1t}, c_{2t+1}, s_1} u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

vzhledem k

$$c_{1t} = w_t - s_{1t}$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_{1t}$$

Plus původní nultá generace

$$\max_{c_{21}} u(c_{21}) \quad \text{vzhledem k} \quad c_{21} = (1 + r_1)\bar{k}_1$$

Firmy

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - w_t L_t - R_t K_t$$

## Konkurenční rovnováha

Série alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ (spotřeby a úspor) agentů a série alokací firem $\{K_t, L_t\}_{t=1}^{\infty}$ (kapitálu, práce) a série cen $\{w_t, r_t\}_{t=1}^{\infty}$ (mzdy a úrokové míry), které řeší

- optimalizační problém spotřebitelů
- optimalizační problém firem
- trhy se čistí v každém období (trh statků, trh práce, trh kapitálu)

Podmínka vyčištění trhu kapitálu říká, že zdrojem pro kapitál v $t + 1$ jsou úspory generace mladých v období $t$, tedy $K_{t+1} = L_t s_{1t}$.

## Vliv úrokové míry na úspory (spotřebu)

CRRA funkce

$$U = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \beta \frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}$$

Celoživotní rozpočtové omezení

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Řešením optimalizace je (jak jinak) Eulerova rovnice

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = [\beta(1 + r_{t+1})]^{\frac{1}{\theta}}$$

Růst spořeby, když spotřebitelé trpělivější nebo úroková míra vyšší. Řešení pro $c_{1t}$

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{\frac{1}{\theta} - 1}} w_t$$

případně pro úspory

$$s_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{1 - \frac{1}{\theta}}} w_t$$

Růst $r_{t+1}$ způsobí (spotřebitel je v roli věřitele)

- důchodový efekt, růst důchodu, zvýšení spotřeby obou normálních statků
- substituční efekt, cena spotřeby v $t$ je relativně vyšší (cena budoucí spotřeby nižší), více spotřebovávat levnější statek, více $c_{2t+1}$ méně $c_{1t}$

Obrázek. Pro případ CRRA funkce, efekty závisí na elasticitě substituce $\frac{1}{\theta} = \sigma$.

- $\frac{1}{\theta} = \sigma > 1$ $SE > IE$, spotřeba $c_{1t}$ klesá, úspory $s_{1t}$ rostou

- $\frac{1}{\theta} = \sigma < 1$ $IE > SE$, spotřeba $c_{1t}$ roste, úspory $s_{1t}$ klesají
- $\frac{1}{\theta} = \sigma = 1$ $IE = SE$, log funkce, oba efetky se vykrátí, úroková míra nemá vliv na spotřebu a úspory

Co když spotřebitel vydělává i ve druhém období?

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}\left(w_t + \frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right)$$

SE i IE zůstávají, nový efekt bohatství, spotřeba $c_{1t}$ klesá, úspory $s_{1t}$ rostou.

## Dynamická analýza modelu

Nalezení rozhodovacího pravidla (a steady-statu). Z rovnice pro vyčištění trhu kapitálu $K_{t+1} = L_t s_{1t}$ získáme

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{1+n} \tag{1}$$

Logaritmická užitková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce. Řešení pro úspory jako funkce mzdy

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t$$

po dosazení (z $MPL = w$) úsporová funkce jako funkce kapitálu

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

Dosadíme do (1) a získáme vývoj kapitálu v čase (jako funkci kapitálu)

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} k_t^{\alpha}$$

Steady state

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Kapitál na hlavu (capital-labor ratio) je konstatní $k^*$. Jak roste $K_t$?

$$K_{t+1} = K_t(1+n)$$

## Vliv demografických změn na míru úspor

Agregátní úspory

$$S_t = K_{t+1} - K_t = nK_t$$

Agregátní míra úspor (v steady-statu)

$$S^* = \frac{S_t}{Y_t} = \frac{nK_t}{Y_t} = \frac{nk}{y} = \frac{n\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}$$

Pokles $n$ (např. snížení porodnosti, populace stárne) způsobí snížení míry úspor.

Intuitivní vysvětlení:

- Počet mladých agentů je relativně menší vůči starým. Úspory jsou dělány mladými (úspory budou nižší). Posun nabídky vlevo.
- Menší počet mladých snižuje nabídku práce. Kapitál bude méně vybaven prací, mezní produkt kapitálu bude menší. Posun poptávkové křivky vlevo.

Množství úspor poklesne, poklesne i výstup (ale méně), míra úspor se tedy sníží.

Jak snížení $n$ ovlivní rovnovážnou úrokovou míru? Dosadíme a vyřešíme

$$r^* = \frac{\alpha(1+\beta)(1+n)}{\beta(1-\alpha)}$$

Pokles $n$ způsobí pokles $r^*$.

## Rovnováha OLG modelu obecně

Z našeho příkladu

$$s_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{-\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}} w_t$$

tedy úspory jsou funkcí $r_{t+1}$ krát $w_t$, tedy $s_{1t} = s(r_{t+1})w_t$. Kapitál závisí na úsporách, což po dosazení dává

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{(1+n)} = \frac{s(r_{t+1})w_t}{(1+n)} = \frac{1}{1+n} s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - kf'(k)_{t+1}]$$

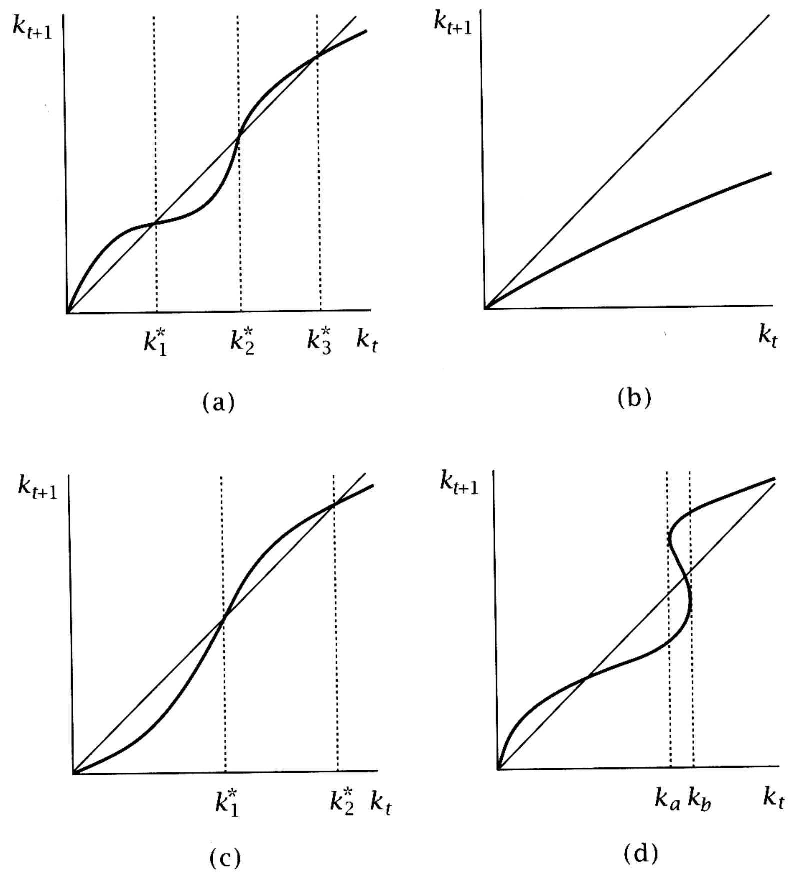
Trochu upravíme

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s(f'(k_{t+1})) \frac{[f(k_t) - kf'(k)_{t+1}]}{f(k_t)} f(k_t)$$

Zprava doleva: Výstup; část výstupu jako odměna práci (labor share); část výstupu, která je uspořena (míra úspor).

Jednoduchý model, ale můžeme dostat různé typy dynamického chování. Obrázek.

- Panel (a), vícenásobná rovnováha (multiple equilibria). (i) když labor share je větší při vyšších hodnotách $k_t$ nebo (ii) když pracovníci spoří velkou část příjmu, když je nízká míra návratnosti (nízký mezní produkt, tedy velké $k_t$).
- Panel (b), konvergence k 0.
- Panel (c) opět multiple equilibria, pro malé $k_t$ konvergence k 0, pro velké $k_t$ konvergence k pozitivní hodnotě.
- Panel (d) ukazuje, že $k_{t+1}$ není jednoznačně určeno. Rozsah $k_a$ až $k_b$, kde jsou možné tři hodnoty $k_{t+1}$. Může nastat, když jsou úspory klesající funkcí $r$. Může docházet k fluktuacím ekonomiky i bez exogenních disturbancí. *Self-fulfilling prophecies* nebo *sunspots*.




## Pareto neefektivnost

Srovnání OLG modelu s Ramseyho modelem.

Ekonomika s depreciací kapitálu.

Omezení ekonomiky

$$K_{t+1} - (1-\delta)K_t + c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1} = F(K_t, L_t)$$

$$(1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} = f(k_t)$$

Spotřeba na pracovníka (obou generací)

$$c_t = c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n}$$

Spotřeba v s.s.

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

Max spotřeby

$$f'(k_{gr}) = n + \delta$$

Zlaté pravidlo. Ekonomika může být

- dynamicky efektivní, $k^* < k_{gr}$, (zvýšení kapitálu zvýší spotřebu v dlouhém období, ale na náklady nižší spotřeby v krátkém období)
- dynamicky neefektivní, $k^* > k_{gr}$, ekonomika akumuluje příliš mnoho kapitálu (snížení kapitálu zvýší spoteřebu ve všech obdobích)

### Ramseyho model

Bez růstu technologie, ale s růstem populace.

Eulerova rovnice z minulé přednášky (růst populace, technologie, nejistota)

$$\frac{\gamma\eta}{\tilde{c}_t} = \beta E_t \frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} \left[(1-\delta) + \alpha z_t \tilde{k}_t^{\alpha-1} (h_t)^{1-\alpha}\right]$$

Pro náš případ vypadá

$$(1+n)u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]$$

Ve steady statu, plus použijeme $\beta = \frac{1}{1+\rho}$.

$$(1+n)(1+\rho) = (1-\delta) + f'(k^*)$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho > n + \delta = f'(k_{gr}) \tag{2}$$

Rovnice (2) je tzv. *modifikované zlaté pravidlo.* Kapitál splňující modifikované zlaté pravidlo je striktně menší než kapitál $k_{gr}$.

Domácnost by mohla spotřebovávat více ve steady-statu, ale je netrpělivá a nechce snížit dnešní spotřebu, aby dosáhla vyšší spotřeby dle zlatého pravidla (raději si vybere více vyhlazenou spotřebu).

Ramseyho model: ve steady statu nemůže být dynamicky neefektivní. Navíc je sociálně optimální, což je důležitější než spotřeba dle zlatého pravidla.

### OLG model

V OLG modelech může být $k^* > k_{gr}$. Příklad z minula. Logaritmická užitková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce. Nulová depreciace.

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^\alpha$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} k_t^\alpha$$

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Mezní produkt kapitálu

$$f'(k^*) = \alpha (k^*)^{\alpha-1}$$

$$f'(k^*) = \alpha \frac{(1+\beta)(1+n)}{\beta(1-\alpha)} = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha}$$

Když $\alpha$ nebo $\rho$ jsou nízké, může se stát, že steady state v OLG modelech je dynamicky neefektivní, tzn. $k^* > k_{gr}$

$$f'(k^*) = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha} < n + (\delta) = f'(k_{gr})$$

Co s tím? Můžeme zvýšit spotřebu ve všech obdobích přeskupením zdrojů.

## Pareto optimální alokace

je sekvence alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ která splňuje rozpočtové omezení ekonomiky a má následující vlastnost: neexisuje žádná jiná alokace $\{\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}, \tilde{s}_t\}_{t=1}^{\infty}$, která splňuje rozpočtové omezení a

$$u(\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}) \geq u(c_{1t}, c_{2t+1}) \quad \forall \quad t \geq 1$$

s ostrou nerovností alespoň pro jeden případ ($t \geq 1$).

(Problémy: Může existovat PO steady-state, ale nikoliv cesta, která k němu vede. Máme dva steady-staty, které můžeme porovnat z hlediska blahobytu, ale ne z hlediska cesty, která k nim vede.)

## Pareto zlepšující alokace (formálně)

Předpoklad, že ekonomika je ve steady statu ($k^*$). Provedeme realokaci, snížíme kapitálovou zásobu o $\Delta k^* < 0$ (dezinvestice).

$$k^{**} = k^* + \Delta k^*$$

Rozpočtové omezení (před změnou)

$$(1+n)k^* + c^* = y^* + (1-\delta)k^*$$

Rozpočtové omezení (po změně)

$$(1+n)k^{**} + c^{**} = y^{**} + (1-\delta)k^{**}$$

$$(1+n)(k^* + \Delta k^*) + c^{**} = y^* + f'(k^*)\Delta k^* + (1-\delta)(k^* + \Delta k^*)$$

Odečtením od sebe dostaneme

$$\Delta c^* = f'(k)\Delta k^* + (1-\delta)\Delta k^* - (1+n)\Delta k^*$$

$$\Delta c^* = [f'(k) - (n+\delta)]\Delta k^*$$

Pokud jsme za $k_{gr}$ pak výraz $f'(k^*) - (n+\delta) < 0$, takže $\Delta c^* > 0$.

## Pareto zlepšující alokace (intuitivně)

Sociální plánovač zavede následujcí transfer:

- sníží úspory mladých o jednotku $\Delta k = 1$ a dá je staré generaci (v období $t$)
- mladých je $(1+n)$ krát starých, takže spotřeba starých se zvýší o $(1+n)$.
- podobně, mladí až zestárnou dostanou také dodatečných $(1+n)$ jednotek spotřeby.

Je tento transfer lepší?

- Mladí si mohou spotřit na stáří sami. Míra návratnosti $r = R - \delta = f'(k^*) - \delta$
- pokud je ekonomika dynamicky neefektivní, pak $f'(k^*) < (n+\delta)$, tzn. míra návratnosti tohoto transferu je vyšší než míra návratnosti soukromých úspor. Mladí budou tento transfer preferovat. (spotřeba v mládí nezměněna, ve stáří jim vzroste)

V OLG modelech jsou úspory jedním způsobem přesunu spotřeby do stáří (mladí musí spořit i když je míra návratnosti nízká). Může se stát, že ekonomika spoří příliš (a akumuluje moc kapitálu).

V Ramseyho modelu je agent „mladý“ (pracovník) a „starý“ (kapitalista) zároveň. Transfer probíhá implicitně mezi domácnostmi v každém období.

ALE, ale Pareto zlepšující alokace je možná pouze v případě, že je nekonečný počet generací. Předpokládejme poslední generaci $T$, která se narodí v $T$ a žije jen toto období. Není zde potřeba úspor, spotřeba pouze v čase $T$.

$$U = u(c_{1T})$$

Rozpočtové omezení ekonomiky

$$c_T = f(k_T) + (1-\delta)k_T$$

Snížení kapitálu způsobí pokles spotřeby

$$\Delta c_T = f'(k^*)\Delta k^* + (1-\delta)\Delta k^*$$

$$\Delta c_T = [1 + f'(k^*) - \delta]\Delta k^* < 0$$

Na konci světa vezmeme od mladých v čase $T$, ale už jim nic nedáme v dalším období, protože další období neexistuje. Tato poslední generace si pohorší. Není možné udělat Pareto zlepšující alokaci. I když můžeme zvýšit spotřebu všech předchozích generací, poslední generace ztratí.

Zdroj Pareto neefektivity. V první přednášce jsme měli, že konkurenční rovnováha je Pareto efektivní (platí 1. teorém blahobytu) při platnosti určitých podmínek (absence externalit atd.). Jednou z podmínek je i konečný počet agentů. Tady je nekonečný počet generací. To umožňuje sociálnímu plánovači provést efektivnější alokaci, která není dostupna trhu. Proto OLG modely mohou být Pareto neefektivní.

Jak dosáhnout snížení úspor?

- daň z kapitálu
- vládní dluh
- nefondový system sociálního zabezpečení (Pay-As-You-Go)

## Příklad PAYGo systému

Zjednodušená forma OLG modelu. Řešení v rámci dvou období, spotřeba když mladý a starý, $c_1$ a $c_2$. Příjem mladého agenta je $y$, když je starý pouze si užívá důchodu a žije z úspor $s$ (a úroku). Populace roste tempem $n$, výstup roste tempem $g$ (technologický pokrok). Vláda zdaňuje mladé ($\tau$) a starým vyplácí důchod $b$, má vyrovnaný rozpočet.

$$\max_{c_1, c_2, s} \log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

vzhledem k

$$c_1 + s = y(1-\tau)$$

$$c_2 = (1+r)s + b$$

$$b = (1+n)(1+g)\tau y$$

Spotřebitel profituje z toho, že když je starý, je kolem něj více mladých k zaplacení penze a tito lidé mají také větší příjem kvůli technologickému pokroku. Po dosazení

$$c_1 + s = y(1-\tau)$$

$$c_2 = (1+r)s + (1+n)(1+g)\tau y$$

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\tau)y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r} = Y(\tau)$$

Řešení (např. Lagrangiánem, Eulerovka, dosazení do rozpočtového omezení)

$$c_1 = \frac{Y}{1+\beta}$$

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}(1+r)Y$$

$$s = (1-\tau)y - \frac{Y}{1+\beta}$$

Jak tento systém ovlivňuje úspory? Úpravami poslední rovnice dostaneme

$$s = \frac{\beta y}{1+\beta} - \frac{(1+n)(1+g)+\beta(1+r)}{(1+r)(1+\beta)}\tau y$$

S rostoucím $\tau$ (větší PAYGo systém), soukromé úspory $s$ klesají. Tzn. větší pay-as-you-go systém snižuje úspory, investice a tím i akumulaci kapitálu. Může tento systém zvyšovat blahobyt? A za jakých podmínek?

$$Y(\tau) = (1-\tau)y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r}$$

$$Y(\tau) = y - \tau y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r}$$

$$Y(\tau) = y + \left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r} - 1\right]\tau y$$

$$(1+n)(1+g) > 1+r$$

což je aproximativně

$$n+g > r$$

Populační růst plus růst důchodu (ekonomiky) je větší než míra návratnosti ze soukromých úspor. PAYGo systém dává smysl v některých zemích, s vysokým populačním růstem. Nyní ale moc ne (příklad Německo, ale i jiné země) $n = 0\%$, $g = 2\%$, průměrný výnos z akciového trhu $r = 7\%$. Nutná reforma. Problém chybějící generace.

Empirické testování dynamické efektivnosti: U.S. růst ekonomiky + populační růst $n+g = 3\%$, výnos z vládních obligací $r = 1\%$. To naznačuje dynamickou neefektivnost. Ale pokud vezmee data z národních účtů a porovnáme (čistý) mezní produkt kapitálu $f'(k) - \delta = R - \delta$ s růstem $n+g$ pak $R - \delta = 10\% > n+g = 3\%$. Podobně pro případ nejistoty: čistý kapitálový důchod > investice. Ekonomika je dynamicky efektivní.