

1 Jednoduchý makroekonomický model

- Reprezentativní firma, reprezentativní domácnost
- optimalizace (maximalizace cílové funkce vzhledem k rozpočtovému omezení)
- mikro přístup k makroekonomii
- konkurenční rovnováha (competitive equilibrium), Paretoovo optimum
- nejprve statický model

1.1 Struktura modelu

- N identických domácností
- 2 druhy statků: spotřeba (c), volný čas ($0 \leq \ell \leq 1$)
- užitková funkce $u(c, \ell)$
- Inadovy podmínky:
 - $\lim_{c \rightarrow 0} u_1(c, \ell) = \infty$, $\lim_{c \rightarrow \infty} u_1(c, \ell) = 0$
 - $\lim_{\ell \rightarrow 0} u_2(c, \ell) = \infty$, $\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_2(c, \ell) = 0$
- M identických firem
- 2 výrobní faktory: práce (n), kapitál (k)
- agregátní zásoba kapitálu K je dána exogenně
- z je exogenní šok v produktivitě
- produkční funkce $y = zf(k, n)$, homogenní stupně 1, Inadovy podmínky podobně
- tři trhy: výstupu/spotřeby, práce, kapitálu
- dvě relativní ceny: reálná mzda (w), reálná nájemní cena kapitálu (r), spotřební statek je *numeraire* s cenou 1
- všichni agenti jsou příjemci cen

1.2 Domácnosti

Maximalizují užitkovou funkci

$$U = u(c, \ell)$$

vybírají c a ℓ vzhledem k rozpočtovému omezení

$$c = w(1 - \ell) + r(K/N) \tag{1}$$

a $0 \leq \ell \leq 1$, $c \geq 0$ a kde $(1 - \ell)$ je nabídka práce. Každá domácnost vlastní stejný podíl K .

Lze řešit pomocí Lagrangiánu nebo dosazením rozpočtového omezení do užitkové funkce (neomezená optimalizace)

Dosazení:

$$u(w(1 - \ell) + r(K/N), \ell)$$

a derivací $\partial u(\dots)/\partial \ell = 0$.

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = u(c, \ell) + \lambda[w - w\ell + r(K/N) - c]$$

a derivace $\partial \mathcal{L}/\partial c = 0$, $\partial \mathcal{L}/\partial \ell = 0$ a $\partial \mathcal{L}/\partial \lambda = 0$.

Řešením je podmínka optimality prvního řádu: mezní míra substituce (mezi volným časem a spotřebou) = reálná mzda

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = w \quad (2)$$

(1) a (2) lze vyřešit pro c a ℓ jako funkce w , r a K/N . (Vlastnosti uživatelské funkce zajišťují, že existuje pouze jedno jediné řešení.)

1.3 Firmy

vybírají vstupy – práci a kapitál, aby maximalizovaly zisk (w a r berou jako dané)

$$\max_{k, n} [zf(k, n) - rk - wn]$$

Podmínky prvního řádu

$$zf_1(k, n) = r \quad (3)$$

$$zf_2(k, n) = w \quad (4)$$

Produkční funkce

$$y = zf(k, n)$$

má konstantní výnosy z rozsahu (homogenní stupně 1, platí Eulerův teorém).

$$\lambda y = zf(\lambda k, \lambda n) \quad (5)$$

$$zf(k, n) = zf_1(k, n)k + zf_2(k, n)n \quad (6)$$

rovnice (3), (4) a (6) implikují, že maximální zisk je 0. Z toho vyplývají dvě věci:

- Nemusíme se starat, jak je zisk firem distribuován (např. dividendy, podíly na zisku)
- Předpokládejme, že k^* a n^* jsou optimální množství výrobních faktorů. Pak musí platit

$$zf(k, n) - rk - wn = 0 \quad (7)$$

pro $k = k^*$ a $n = n^*$. Ale (7) platí i pro $k = \lambda k^*$ a $n = \lambda n^*$, kde $\lambda > 0$ díky CRS.

Tím pádem není určena optimální velikost firmy, můžeme mít $M = 1$ – jedna reprezentativní firma. (Počet firem je irelevantní pro definici konkurenční rovnováhy)

1.4 Konkurenční rovnováha (competitive equilibrium)

Soubor množství c , ℓ , n , k a cen w , r , které splňují tyto podmínky

1. Každá domácnost vybírá c a ℓ optimálně při daných cenách w a r (rovnice 1 a 2)
2. Reprezentativní firma vybírá n a k optimálně při daných cenách w a r (rovnice 3, 4 a 5)
3. Trhy se čistí (chování domácností a firem je vzájemně konzistentní)

- trh práce

$$N(1 - \ell) = (M)n \quad (8)$$

- trh kapitálu

$$K = (M)k \quad (9)$$

- trh zboží

$$(M)y = Nc \quad (10)$$

Nabídka = poptávka. Přebytky poptávky na jednotlivých trzích jsou

$$Nc - y + w[n - N(1 - \ell)] + r[k - K].$$

Z (upraveného) rozpočtového omezení domácností (1) a podmínky nulového zisku (7) vyplývá, že přebytky na všech trzích jsou v součtu nulové.

$$Nc = w(1 - \ell)N + rK \quad \text{a} \quad y - rk - wn = 0$$

$$Nc - y + w[n - N(1 - \ell)] + r[k - K] = 0 \quad (11)$$

Pokud dvě ze tří podmínek (8, 9 a 10) platí, tak podle (11) platí i třetí podmínka.

Walrasův zákon: Pokud je Q trhů a $Q - 1$ je jich v rovnováze, pak i poslední trh je v rovnováze.

Využijeme Walrasův zákon. Máme 8 rovnic a 7 proměnných (neznámých) w , r , n , k , c , ℓ a y . Můžeme 1 rovnici eliminovat, např. (9).

Problém si můžeme dále zjednodušit. Počet spotřebitelů je pro řešení irelevantní. Můžeme nastavit $N = 1$ a analyzovat ekonomiku s jedním reprezentativním spotřebitelem – domácností. Konkurenční rovnováha (CE) má stejné vlastnosti jako když máme mnoho firem a spotřebitelů.

Řešíme jako systém rovnic, využijeme $n = (1 - \ell)$

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = zf_2(k, 1 - \ell) = w \quad (12)$$

$$c = zf(k, 1 - \ell) \quad (13)$$

$$r = zf_1(k, 1 - \ell), \quad w = zf_2(k, 1 - \ell) \quad (14)$$

dosazením za c dostaneme

$$\frac{u_2(zf(k, 1 - \ell), \ell)}{u_1(zf(k, 1 - \ell), \ell)} = zf_2(k, 1 - \ell) \quad (15)$$

a vyřešíme pro ℓ ($k = k_0$ je dáno). Potom zpětně dosadíme do výše uvedených rovnic a získáme řešení pro r , w , n a c . Máme model, který umíme vyřešit a který můžeme studovat: co se stane, když se změní některá z veličin.

Zajímá nás např. změna výstupu (na hlavu) $y = zf(k, 1 - \ell)$, který je určen:

- kapitálovou zásobou (k)
- produktivitou (z)
- preferencemi pro volný čas ($1 - \ell$)

Změna výstupu pak bude mít vliv i na ostatní veličiny. Příklad z Williamsona (růst produktivity).

1.5 Pareto optimum

je taková alokace,¹ při které neexistuje jiná alokace, kterou by nějaký agent striktně preferoval a jakýkoliv jiný agent by si nepohoršil.

My máme jen jednoho agenta. Můžeme uvažovat o tzv. sociálním plánovači, který

- určuje vstupy na výrobu reprezentativní firmě
- nutí spotřebitele nabízet náležité množství práce
- distribuuje statky spotřebitelům – tak aby na tom byl spotřebitel co možná nejlépe

Sociální plánovač určí Pareto optimum řešením následujícího problému

$$\max_{c, \ell} u(c, \ell) \quad \text{vzhledem k} \quad c = zf(k, 1 - \ell)$$

Můžeme řešit dosazením, výsledkem je

$$\frac{u_2(c, \ell)}{u_1(c, \ell)} = zf_2(k, 1 - \ell) \quad (16)$$

což je stejná rovnice jako v případě CE (competitive equilibrium – konkurenční rovnováha). Interpretace: mezní míra substituce = mezní míra transformace. CE je stejné jako Pareto optimum (řešení sociálního plánovače).²

1.6 Teoremy blahobytu (Welfare theorems)

Za určitých podmínek (definováno níže)

1. Konkurenční rovnováha je Pareto optimální (*První teorém blahobytu*)
2. Jakéhokoliv Pareto optima může být dosaženo vhodným přerozdělením počátečního vybavení (zdrojů), (*Druhý teorém blahobytu*)

Podmínky: absence externalit, veřejných statků, rostoucích výnosů z rozsahu, asymetrických informací, distorzních daní, nutnost kompletních trhů.

Implikace:

- V makroekonomii, pokud vysvětlíme určitý jev (např. hospodářské cykly) pomocí modelu konkurenční rovnováhy, kde platí 1. WT \Rightarrow není prostor pro vládní intervence
- Rovnost CE a PO je dobrá z hlediska výpočetního. Je jednodušší získat řešení (CE), když vyřešíme problém SP a dostaneme rovnovážná množství a pak vyřešíme pro ceny (než řešení všeho zároveň)

¹Plán produkce a distribuce statků mezi ekonomické agenty.

²Když $u(\cdot; \cdot)$ je striktně konkávní a $f(\cdot; \cdot)$ striktně kvazikonkávní, existuje jediné Pareto optimum a CE je také jediné.

2 Dynamická ekonomie

- Domácnosti se rozhodují, kolik spotřebují dnes a kolik ušetří.
- Žijí T období
- užitková funkce je časově separabilní (2 krát diff, striktně rostoucí a striktně konkávní)

$$U[(c_0, \ell_0), (c_1, \ell_1), (c_2, \ell_2) \dots (c_T, \ell_T)] = u(c_0, \ell_0) + \beta u(c_1, \ell_1) + \beta^2 u(c_2, \ell_2) + \dots + \beta^T u(c_T, \ell_T)$$

$\beta \in (0, 1)$ je *diskontní faktor*, vyjadřující netrpělivost domácností ve spotřebě

Někdy se používá *diskontní míra* $\rho > 0$ přičemž platí

$$\beta = \frac{1}{1 + \rho}$$

Domácnosti jsou vybaveny aktivy (bondy – obligace), $a_0 \geq 0$.

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

Na začátku má domácnost aktiva a_0 . A co na konci? Pokud může zemřít zadlužená, udělá to. Proto ji omezíme, aby $a_{T+1} \geq 0$. Ale domácnost nemá důvod něco nechávat dědicům, když ví, kdy umře, proto $a_{T+1} = 0$ (konečná podmínka).³ No-Ponzi game condition.

Maximalizační problém

$$\max_{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}} \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, \ell_t)$$

vzhledem k

$$c_t + a_{t+1} = w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t$$

a $c_t \geq 0$ a $a_{T+1} \geq 0$. Odvodíme nutné podmínky optimality (jsou i postačující). Řešíme pomocí Lagrangiánu.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t, \ell_t) + \sum_{t=0}^T \lambda_t [w_t(1 - \ell_t) + (1 + r_t)a_t - c_t - a_{t+1}]$$

Podmínky prvního řádu (first order conditions, FOC) vzhledem k c_t , c_{t+1} a a_{t+1} položíme rovny 0. Dosazením dostaneme

$$u_c(c_t, \ell_t) = u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})\beta(1 + r_{t+1})$$

„Náklady“ z úspory jednotky spotřeby dnes = přínos vyšší spotřeby zítra.

Eulerova rovnice (mezní míra substituce = tržní úroková míra)

$$\frac{u_c(c_t, \ell_t)}{\beta u_c(c_{t+1}, \ell_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

Stav, kdy spotřeba a úroková míra jsou v čase konstantní: steady-state, $c_t = c_{t+1} = c$, $r_t = r_{t+1} = r$.

$$\frac{1}{1 + \rho} = \beta = \frac{1}{1 + r}$$

V steady-statu je $\rho = r$.

Řešení: Pro jednoduchost přijmeme předpoklad $l_t = 0$, tj. domácnost pouze pracuje. Rozpočtové omezení rozepíšeme pro $t + 1$ a dosadíme do Eulerovy rovnice.

$$c_t = w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}$$

³Pro $T = \infty$ je to složitější, později.

$$c_{t+1} = w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}$$

Eulerova rovnice

$$u_c[w_t + (1 + r_t)a_t - a_{t+1}] = \beta(1 + r_{t+1})u_c[w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1} - a_{t+2}] \quad (17)$$

Ceny jsou dané $\{w_t, r_t\}_{t=0}^T$. Jediné proměnné, které potřebujeme určit jsou a_t, a_{t+1}, a_{t+2} . Rovnice (17) je diferenční rovnice druhého řádu (obecně nelineární).

Máme celkem $T + 2$ rovnic: počáteční podmínku a_0 a koncovou podmínku $a_{T+1} = 0$ a T Eulerovek. Počet proměnných je také $T + 2$: $\{a_t\}_{t=0}^{T+1}$. Počet neznámých = počet rovnic. Bude to mít řešení a bude jediné, díky vlastnostem užitkové a produkční funkce.

Vybereme konkrétní tvar užitkové funkce, použijeme nějakou matematickou aproximaci (linearizace – naučíme se později) a systém rovnic můžeme vyřešit (nejlépe pomocí nějakého softwaru).