7. seminář:

DEA, nelineární optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti: Lagrangeovy multiplikátory

Příklad 1: Uvažujte DEA model pro 8 nemocničních oddělení, jejichž výkon je charakterizován následujícími hodnotami:

Jednotka	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8
personál	7	6	6	8	10	5	4	5
pacientů ambulantně	21	24	42	16	50	45	40	60
hospitalizovaných pacientů	63	36	48	40	40	15	24	10

Znázorněte graficky. Uvažujte konstantní výnosy z rozsahu a najděte efektivní hranici. Pro 5. oddělení určete míru efektivity a nalezněte jeho referenční jednotky při orientaci na výstupy.

Příklad 2: (Úloha Mgr. Jany Kalčevové, PhD z VŠE)

Uvažujte model DEA s 2 vstupy, 3 výstupy a 10 hodnocenými jednotkami:

X (vstupy)									
3	2,5	4	2,3	4	7	3	5	5	2
5	4,5	6	3,5	6,5	10	5	7	7	4
Y (výstupy)									
40	45	55	28	48	80	45	70	45	45
55	50	45	50	20	65	64	65	65	40
30	40	30	25	65	57	42	48	40	44

Najděte všechny efektivní jednotky, uvažujete - li

a) CCR model orientovaný na vstupy

b) CCR model orientovaný na výstupy

c) BCC model orientovaný na vstupy

d) BCC model orientovaný na výstupy

Najděte pro 3. jednotku referenční efektivní jednotky, uvažujete-li

a) CCR model orientovaný na vstupy

b) BCC model orientovaný na výstupy

K výpočtům použijte aplikaci DEA (ke stažení z http://nb.vse.cz/ jablon/)

Příklad 3: Uvažujte optimalizační problém firmy, která má k dispozici dva výrobní faktory (F_1, F_2) s jednotkovými cenami $w_1 = 2$ Kč a $w_2 = 3$ Kč a rozhoduje se, jak s pomocí těchto výrobních faktorů co nejlevněji vyrobit požadované množství produktu $Q = 10$. Vyprodukované množství produktu se řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí s exponenty $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ pro množství výrobních faktorů F_1 a F_2.

a) zapište matematický model úlohy

b) řešte jako jednorozměrnou úlohu bez omezení

c) řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů

Příklad 4: Uvažujte jednoduchý regresní model

$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, n$

kde:

β je neznámý parametr

$X_1, \ldots, X_n$ jsou pevné hodnoty a

$\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n$ jsou nezávislé stejně rozložené chyby s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2.

Gauss-Markovova věta, tvrdí, že odhad $\hat{\beta}$ získaný metodou největších čtverců je "BLUE", tedy nejlepší nestranný lineární odhad parametru β. Matematicky formulováno:

- $\hat{\beta}$ je lineární, tedy $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$ pro nějaké koeficienty $c_1, \ldots, c_n$
- $\hat{\beta}$ je nestranný, tj. $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $\hat{\beta}$ je nejlepší takový odhad, tedy má mezi těmito odhady minimální střední kvadratickou chybu $E(\hat{\beta} - \beta)^2$ (což je v případě nestrannosti totéž jako minimální rozptyl).

Formulujte jako optimalizační problém s omezením a najděte $\hat{\beta}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Příklad 5: Úloha o rozdělení spotřeby v čase:

Předpokládejme, že chceme maximalizovat užitek ze spotřeby během dvou období, ve kterých máme příjmy I_1 a I_2, přičemž nespotřebované prostředky z prvního období můžeme zúročit s úrokovou mírou r. Užitková funkce se předpokládá ve tvaru $U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta \cdot u(C_2)$, kde $\beta \in (0, 1)$ je koeficient vyjadřující subjektivní preferenci současné spotřeby před spotřebou budoucí.

a) Sestavte Lagrangeovu funkci a zapište podmínky prvního řádu, jako proměnné přitom uvažujte C_1, C_2, S_1 a jako omezující podmínky rozpočtová omezení v jednotlivých obdobích.

b) Najděte řešení podmínek, předpokládáme-li užitkovou funkci ve tvaru

$$u(C) = lnC$$